Zasadnicze twierdzenie algebry

Do braków w zaopatrzeniu zdążyliśmy się przyzwyczaić, ale gdy w upalny dzień człowiek spragniony znajdzie wreszcie sklep z szyldem *Napoje*, a w środku dowie się, że nic do picia nie ma, to irytacja tego nieszczęśnika jest ogromna. Jak to, nie ma?

Niektóre równania algebraiczne nie mają pierwiastków rzeczywistych, inne mają ich mniej, niż można by się spodziewać. Ten brak był dla niektórych matematyków równie irytujący, jak braki w zaopatrzeniu w napoje chłodzące. Człowiekowi spragnionemu niewiele pomoże wyjaśnienie, że „nie dowieźli"; matematykom też nie wystarczało twierdzenie:

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ o współczynnikach rzeczywistych spełniających warunek $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Radykalnym środkiem na braki pierwiastków równań algebraicznych okazało się zasadnicze twierdzenie algebry:

Każdy wielomian stopnia większego od zera ma pierwiastek w zbiorze liczb zespolonych.

Zaraz, zaraz, a w szkole uczyli, że trójmian kwadratowy o ujemnym wyróżniku nie ma pierwiastków. Racja, ale taki trójmian nie ma pierwiastków rzeczywistych, a zasadnicze twierdzenie algebry mówi o pierwiastkach zespolonych. Weźmy na przykład trójmian $w(x) = x^2 + 2x + 5$, obliczmy wyróżnik $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$. Nie ma więc pierwiastków rzeczywistych. Ale w zbiorze liczb zespolonych istnieje $\sqrt{\Delta} = 4i$, a stosując znane wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego otrzymamy

$$x_1 = \frac{-2-4i}{2} = -1 - 2i, \quad x_2 = -1 + 2i.$$

Proszę sprawdzić, że istotnie liczby zespolone x_1 i x_2 są pierwiastkami rozważanego trójmianu kwadratowego $w(x)$.

Zasadnicze twierdzenie mówi o jednym pierwiastku, ale stąd już wynika, że wielomian stopnia n ma n pierwiastków zespolonych. Istotnie, jeśli liczba zespolona z_1 jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$, to $w(x) = (x - z_1) \cdot w_1(x)$, gdzie $w_1(x)$ jest wielomianem stopnia $n - 1$. Do wielomianu w_1 można znów zastosować zasadnicze twierdzenie algebry: wielomian $w_1(x)$ ma pierwiastek z_2, więc $w(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdot w_2(x)$, itd., aż otrzymamy rozkład wielomianu $w(x)$ na n czynników liniowych $w(x) = (x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n) \cdot c$. Zatem wielomian $w(x)$ ma n pierwiastków zespolonych $z_1, z_2, \dots, z_n$ (niektóre z tych pierwiastków mogą być równe). Udowodniliśmy twierdzenie:

Wielomian stopnia n ma n pierwiastków zespolonych.

Ostatnie zdanie podaje pierwsze sformułowanie zasadniczego twierdzenia algebry, które pojawiło się w pracach matematyków już w XVII wieku, m.in. w pracach Kartezjusza. Próby dowodu zasadniczego twierdzenia algebry podejmowane były w wieku XVIII. Pierwszy dowód podał Jean le Rond d'Alembert w 1746 r., niestety, dowód zawierał pewne nieścisłości. Poprawny dowód opublikował w 1799 r. Carl Friedrich Gauss. Dowód ten opierał się w pełni na metodach analitycznych. Kilkanaście lat później Gauss podał inny, algebraiczny dowód. Następne lata przyniosły jeszcze wiele innych dowodów, wszystkie one jednak są dość skomplikowane, co może utwierdzić nas w przekonaniu, że zasadnicze twierdzenie algebry wyraża fakt bardzo głęboki.

Sformułowanie twierdzenia podaliśmy dość nonszalancko „każdy wielomian ...". Czy chodzi o wielomiany o współczynnikach rzeczywistych, czy zespolonych? Kartezjuszowi i współczesnym mu matematykom chodziło, oczywiście, o wielomiany o współczynnikach rzeczywistych. Gauss również zajmował się wielomianami o współczynnikach rzeczywistych i udowodnione przez niego twierdzenie brzmiało:

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych stopnia większego od 1 można rozłożyć na czynniki liniowe lub kwadratowe (o ujemnych wyróżnikach) mających współczynniki rzeczywiste.

Algebraiczny dowód Gaussa zawierał szereg pomysłów, które okazały się wkrótce inspiracją do powstania nowych pojęć algebraicznych, m.in. pojęcia ciała. Dzięki temu możemy obecnie sformułować zasadnicze twierdzenie algebry, jak następuje:

Każdy wielomian stopnia dodatniego o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek w ciele liczb zespolonych.

Wszystkie wymienione poprzednio sformułowania są szczególnymi przypadkami tego ostatniego.

Maciej BRYŃSKI