epsilon

7/93
(29)

Tak się złożyło, że czterej finaliści ubiegłorocznej Olimpiady Matematycznej spotkali się wkrótce potem podczas finału Olimpiady Fizycznej. Efektem tych spotkań było zauważenie pewnej niewątpliwej wady pierwszej z wymienionych Olimpiad. Mowa o kompletnym braku w Olimpiadzie Matematycznej zadań doświadczalnych. Tę obserwację wspomniani panowie (prosząc o niepublikowanie ich nazwisk) przekazali redakcji *EPSILONA.*

Podzielamy pogląd, że niedopatrzenie jest dużej rangi i należy je naprawić. Być może przyczyną tej usterki jest brak odpowiednich wzorców. Ogłaszamy zatem konkurs na doświadczalne zadanie matematyczne. Wiemy wprawdzie, że wymyślić ciekawe zadanie nie jest łatwo (a co dopiero niestandardowe zadanie doświadczalne!), wierzymy jednak w Czytelników *Delty*. Czekamy na listy. Oczywiście, ciekawsze zadania opublikujemy, proponując Czytelnikom ich rozwiązanie.

Ponownie o łańcuchach

Własność posiadaną przez pewne pary elementów danego zbioru nazywamy relacją w tym zbiorze. Zbiór X nazywamy „częściowo uporządkowanym przez relację $\leq$ ”, jeśli:

1) $a \leq a$ dla wszystkich $a \in X$,
2) z tego, że $a \leq b$ i $b \leq c$ wynika, że $a \leq c$,
3) jeśli $a \leq b$ i $b \leq a$, to $a = b$.

Dla pewnych a, b może się zdarzyć, że ani $a \leq b$, ani $b \leq a$. Podzbiór $Ł$ zbioru X spełniający własność: „jeśli $a, b \in Ł$, to $a \leq b$ lub $b \leq a$" (każde dwa elementy $Ł$ są porównywalne) nazywamy łańcuchem. Z kolei antyłańcuch to taki podzbiór A zbioru X, że: „dla $a, b \in A$, jeśli $a \leq b$ lub $b \leq a$, to $a = b$" (każde dwa różne elementy są nieporównywalne).

W *EPSILONIE* nr 9/1992 zaproponowałem Czytelnikom zadanie:
Zbiór $P(\mathrm{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych N jest częściowo uporządkowany przez relację zawierania. Czy istnieje w $P(\mathrm{N})$ łańcuch nieprzeliczalny?
(Zbiór jest przeliczalny, gdy jego elementy można ustawić w ciąg – np. zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, a zbiór liczb rzeczywistych nie).

Oto rozwiązanie.
Liczby naturalne „ustawmy" na liczbach wymiernych (niech f będzie bijekcją N na $\mathbf{Q}$).
Dla liczby **rzeczywistej** a określmy zbiór $K_a = \{n \in \mathrm{N}\colon f(n) \leq a\}$. Oczywiście, gdy $a < b$, to $K_a \subset K_b$. W ten sposób skonstruowaliśmy łańcuch, który ma tyle elementów, co zbiór liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie wydaje się bardzo proste, ale... Proponując zadanie Czytelnikom *EPSILONA* zaznaczyłem, że może ono sprawić kłopoty. Niejednemu bowiem mogłoby się wydawać, że nieprzeliczalny łańcuch nie istnieje. To, że liczby wymierne można ustawić w ciąg, jest standardem matematycznym, ułożenie jednak liczb naturalnych na liczbach wymiernych (mimo że jest dokładnie tym samym!) znacznie rzadziej bywa przydatne. Przez 6 lat dawałem to zadanie studentom I roku matematyki na ćwiczeniach z teorii mnogości (jako nadobowiązkowe zadanie do domu) i otrzymałem jedynie 4 poprawne rozwiązania – oraz bardzo dużo dowodów nieistnienia nieprzeliczalnego łańcucha. Podobnie było i tym razem; wśród licznych odpowiedzi, które nadesłali Czytelnicy *EPSILONA*, były jedynie dwie dobre – ich autorami byli Pan Artur Popławski oraz Czytelnik proszący o zachowanie jego nazwiska do wyłącznej wiadomości redakcji.

Zadanie to wysłałem kiedyś do kącika problemów czasopisma *The Mathematical Intelligencer*. Popełniłem jednak błąd, dołączając od razu rozwiązanie – redaktor kolumny uznał zadanie za zbyt proste, by prosić czytelników o nadsyłanie odpowiedzi i umieścił je w kolumnie *Quickie* szybkich, łatwiejszych problemów, których rozwiązań do pisma się nie przysyła. Nie wiem więc, jak tam wypadłaby statystyka...

Przy okazji dodam, że w związku z tekstem o Wielkim Twierdzeniu Fermata zamieszczonym w *EPSILONIE* dwa miesiące wcześniej nadesłano nam sporo dowodów Wielkiego Twierdzenia Fermata (więcej niż rozwiązań zadania z łańcuchem!). Niestety, w tym przypadku wszystkie dowody były jednak błędne.

Ciekawych zadań o łańcuchach jest więcej. Oto kolejne, też niebanalne:
W zbiorze częściowo uporządkowanym X każdy łańcuch jest zbiorem skończonym i każdy antyłańcuch jest zbiorem skończonym. Czy stąd wynika, że zbiór X jest skończony?

I następny problem – chyba trochę trudniejszy, dla tych, którzy znają podstawowe pojęcia teorii mnogości:
W nieskończonym zbiorze częściowo uporządkowanym X każdy łańcuch ma moc mniejszą od liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ i każdy antyłańcuch ma moc mniejszą od $\mathfrak{m}$. Czy stąd wynika, że zbiór X ma moc mniejszą od $\mathfrak{m}$?

Redakcja *EPSILONA* zachęca do zaatakowania tych zadań, a tych, którym uda się któreś z nich pokonać, do przysłania szkiców rozwiązań.

Krzysztof CIESIELSKI

Matematyka i życie

Liczba 26! ma 27 cyfr. W Krakowie jest 26 liceów ogólnokształcących; można je uporządkować właśnie na 26! sposobów. Matematyka – w szczególności za pomocą liczb – ułatwia życie, preferując niektóre uporządkowania. Nowa książka telefoniczna województwa krakowskiego, wydana jesienią 1992 jako efekt współpracy Telekomunikacji Polskiej S.A. i szwedzkiej firmy *Nord Trans Handelshus AB* wymienia 26 krakowskich liceów ogólnokształcących w następującej kolejności (cudzysłowy, kropki oraz duże litery podajemy tak, jak w książce telefonicznej – opuszczamy jedynie adresy szkół i numery telefonów):

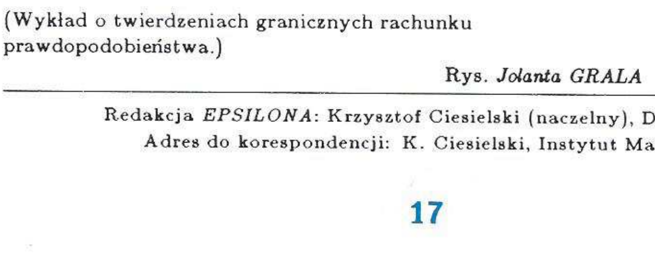
dla Pracujacych nr IV
nr I, Prywatne
nr I, Społeczne
nr III
nr IV
nr IX
nr XI
nr XII
nr XIV
nr XV
nr XVI
nr XXI
„World" IV Prywatne
dla pracujacych nr III
dla pracujacych nr V
nr I
nr II
nr V
nr VI
nr VII
nr VIII
nr X
nr XIII
OO. „Pijarow", prywatne
P.P. Prezentek
Społeczne nr III

EPSILON funduje specjalną nagrodę osobie, która wskaże logiczne uzasadnienie takiej właśnie kolejności. (Uwaga – licea nie zostały ułożone np. wg alfabetycznej kolejności adresów czy rosnących numerów telefonicznych).

Zgodnie z hasłami reklamowymi, książkę wydano w sposób istotnie unowocześniony. Radzimy ją czym prędzej nabyć, gdyż we wstępie zapowiedziano, że „następne wydanie spisu będzie zaktualizowane i nowocześniejsze" – kto wie, w jakiej kolejności zostaną tam umieszczeni indywidualni abonenci...

Galeria Jednego Cytatu

„...I ciągniemy nierówność w tę stronę".



(Wykład o twierdzeniach granicznych rachunku prawdopodobieństwa.)

Rys. *Jolanta GRALA*

Mowa potoczna na zajęciach z matematyki

Dlaczego zabawne powiedzonka profesora pamiętasz dłużej niż treść jego lekcji? Dlaczego kumpel z poczuciem humoru w ciągu 5 minut wyjaśni ci to, co nauczyciel-nudziarz tłumaczył przez godzinę? Odpowiedź kryje się w fenomenie mowy potocznej. Naprawdę, warto ją stosować – także i w tak ścisłej i sformalizowanej nauce, jaką jest matematyka.

Język potoczny w cudowny sposób potrafi ożywić i ubarwić nawet najbardziej drętwą lekcję. Treści, które wyposażono w konkretne kształty i dowcipną fabułę, zawsze są łatwiejsze w odbiorze, bardziej zrozumiałe, a ponadto dłużej pozostają w pamięci. Jeśli na najniższym poziomie nauczania nikogo nie dziwi mowa potoczna i ożywianie pojęć abstrakcyjnych (gdy np. 3 mówi do x: „ja jestem od ciebie o 4 mniejsza i co ty na to?"), to dlaczego miałoby kogoś gorszyć „bieganie punktu po brzegu obszaru" czy „wyduszanie wniosku z twierdzenia".

„Nic nie jest (...) ani zbyt poetyczne, ani zbyt wulgarne, gdy jakieś pojęcie abstrakcyjne trzeba uczynić jaśniejszym. Jeśli intuicja podpowie wam, by być w klasie nieco poetycznym lub nieco wulgarnym, to nie powstrzymujcie się od tego" (George Polya).

Strzeżmy się jednak przed nadużyciami! Żywa mowa może być ilustracją czy objaśnieniem do ścisłych rozważań, ale nie może ich zastąpić tam, gdzie są one konieczne. Tym bardziej nie może zastąpić poprawnego, ścisłego i precyzyjnego sposobu wypowiadania się w matematyce. Brońmy się też przed pokusą tworzenia neologizmów (czyli wymyślania własnych, nowych słów). Czasem dla ułatwienia rozważań warto coś sobie jakoś nazwać, ale lepiej unikać słownych dziwolągów, bo i tak wkrótce nie będziemy pamiętać, co one miały oznaczać.

Może zamieszczone poniżej autentyczne przykłady stosowania mowy potocznej na zajęciach z matematyki zachęcą niektórych do odważniejszego i swobodniejszego traktowania języka nauk ścisłych?

– *Rozwiązanie już mamy, trzeba tu teraz tylko posprzątać* [=przeprowadzić redukcję wyrazów podobnych].
– *Metoda Monte Carlo jest najtańsza* [=wymaga najmniej rachunków].
– *Można tak zmienić tę funkcję, że własność ciągłości będzie uratowana.*
– *To zadanie jest płaskie* [=dotyczy płaszczyzny].
– *Teraz punkt puszczamy w ruch, czyli stawiamy pod duży kwantyfikator.*
– *W tym momencie dowodu poruszamy się po bardzo grząskim gruncie.*
– *Rozwiązanie zadania wymaga jeszcze paru zabiegów kosmetycznych.*
– *To była esencja, więc może ja ją teraz rozwodnię.*
– *Trochę to pouprasczaliśmy i już nie jest takie krzaczaste.*
– *Możemy to zrobić gołymi rękami.*
– *Macierz A definiuje pewne przekształcenie liniowe, jak zresztą każda uczciwa macierz na świecie.*
– *Odcinek* $[-1,1]$ *z wykłutym punktem zero.*
– *Na szczęście po wykonaniu tej operacji żadna potęga się nam w tych iloczynach nie urodziła.*
– *Uzbrojeni w takie twierdzenie możemy bez obawy przystąpić do rozwiązania naszego zadania.*

Elżbieta BOBIK

Tekst o mowie potocznej przysłała nam Czytelniczka z Wrocławia, a rysunek do Galerii Jednego Cytatu Czytelniczka z Poznania. Dziękujemy.

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.