

Kłopoty z aproksymacją punktów stałych

Jarosław GÓRNICKI

Pewne problemy matematyczne wyróżniają się prostotą i naturalnością sformułowań. Niestety, nie oznacza to, że ich rozwiązania (o ile potrafimy je wskazać) są równie proste. Przekonują nas o tym, między innymi, przykłady z teorii liczb lub elementarnej geometrii.

Wiemy, że w pewnych sytuacjach istnieją rozwiązania równania $Tx = x$; nazywamy je punktami stałymi (niezmienniczymi) odwzorowania T .

Matematycy czasem oznaczają wartości funkcji T w punkcie x przez Tx , zamiast $T(x)$.

Mówi o tym, na przykład, twierdzenie Brouwera:

Twierdzenie (L.E.J. Brouwer, 1911).

Jeżeli B jest domkniętą kulą w n -wymiarowej przestrzeni \mathbf{R}^n i $T : B \rightarrow B$ jest odwzorowaniem ciągłym, to istnieje taki punkt $x_0 \in B$, że $Tx_0 = x_0$.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966) – matematyk holenderski.

Niestety, twierdzenie to nic nie mówi, jak te rozwiązania wyznaczyć! I na ten problem zwrócimy tutaj uwagę. Ograniczymy się do prostej sytuacji, gdy T jest odwzorowaniem ciągłym i $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Rysując w prostokątnym układzie współrzędnych XOY (ze zwykłym sposobem mierzenia odległości) wykres dowolnej funkcji ciągłej $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ oraz funkcji identycznościowej $i(x) = x$ stwierdzamy, że wykresy te mają co najmniej jeden punkt wspólny. Innymi słowy, prawdziwe jest twierdzenie

Twierdzenie 1 (jednowymiarowa wersja twierdzenia Brouwera).

Jeżeli odwzorowanie $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest ciągłe, to istnieje taki punkt $x_0 \in [0, 1]$, że $Tx_0 = x_0$.

Czytelnik może sprawdzić – wystarczą odpowiednie rysunki – że twierdzenie to nie musi być prawdziwe, gdy T nie jest odwzorowaniem ciągłym bądź gdy rozważany przedział nie jest domknięty.

Dowód. Wykorzystamy własność Darboux: jeżeli funkcja $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła, $F(a) = u$, $F(b) = v$, to dla dowolnego z leżącego pomiędzy u i v istnieje taki punkt $c \in [a, b]$, że $F(c) = z$.

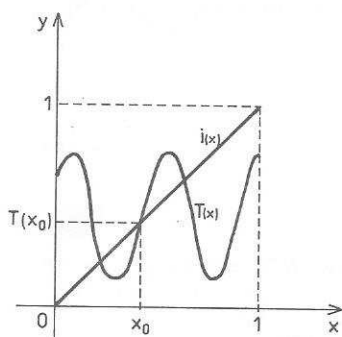
Jean Gaston Darboux (1842 – 1917) – matematyk francuski.

Niech $F(x) = x - Tx$. Wtedy funkcja $F : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ jest ciągła jako różnica funkcji ciągłych, a ponadto $F(0) = 0 - T(0) \leq 0$ oraz $F(1) = 1 - T(1) \geq 0$. Istnieje zatem taki punkt $x_0 \in [0, 1]$, że $F(x_0) = 0$. Oznacza to, że $Tx_0 = x_0$. ■

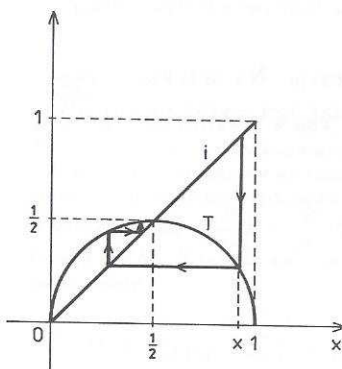
Twierdzenie to i jego dowód są przykładem egzystencjalnego i niekonstruktywnego rezultatu matematycznego. Gwarantuje ono, w opisanej sytuacji, istnienie rozwiązania równania $Tx = x$, ale go nie wskazuje. Nie mówi też ono o liczbie tych rozwiązań. Spróbujmy jednak wskazać lub aproksymować jakies jedno rozwiązanie tego równania w sytuacji z twierdzenia 1. Czy biorąc dowolny punkt $x \in [0, 1]$ i tworząc ciąg iteracyjny $\{x_n = T^n x\}$ otrzymujemy ciąg zbieżny do punktu stałego odwzorowania T ?

Przypatrzmy się sytuacjom z rysunków 2 i 3. Na rysunku 2 funkcja

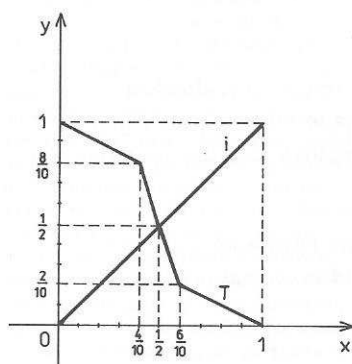
$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dana wzorem $T(x) = \left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)^{1/2}$ ma dwa punkty



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rozwiązanie zadania F 368.

Niech Q oznacza ciepło bryłki węgla, S – jej powierzchnię, a T – temperaturę. Prawo Stefana-Boltzmana możemy zapisać w postaci

$$\frac{dQ}{dt} = \sigma T^4 S = \int I(\nu) d\nu \cdot S.$$

Energia pojedynczego fotonu wynosi $h\nu$. Stąd liczba fotonów emitowanych w jednostce czasu jest równa

$$\frac{dn}{dt} = \int \frac{I(\nu)}{h\nu} d\nu \cdot S.$$

Podstawiając $x = \frac{h\nu}{kT}$ i zamieniając zmienne całkowania mamy

$$\frac{dn}{dt} = \alpha \cdot T^3 \cdot S,$$

gdzie

$\alpha = \frac{k^3}{h^3} \frac{8\pi}{c^3} \beta_2$, $\sigma = \frac{k^4}{h^3} \frac{8\pi}{c^3} \beta_3$. Wyrażając z prawa Stefana-Boltzmana dt za pomocą dQ mamy

$$\frac{dn}{dQ} = \frac{\alpha T^3 S}{\sigma T^4 S} = \frac{\alpha}{\sigma} \cdot \frac{1}{T}.$$

Stąd

$$n = \frac{\alpha}{\sigma} \int \frac{dQ}{T}.$$

Ponieważ entropia definiowana jest jako $S_0 = \int \frac{dQ}{T}$ oraz $S_0 = S_m \cdot n_0$, gdzie n_0 jest liczbą moli węgla, mamy

$$n = \frac{\alpha}{\sigma} S_m n_0 = \frac{\beta_2}{\beta_3} \frac{1}{k} S_m \cdot n_0.$$

Stałą Boltzmana możemy wyrazić za pomocą liczby Avogadro N_A oraz stałej gazowej R : $k = \frac{R}{N_A}$. Stąd ilość fotonów przypadających na jeden atom węgla wynosi

$$q = \frac{n}{N_A \cdot n_0} = \frac{S_m}{R} \cdot 0,371 = 0,254.$$

stałe: $x_1 = 0$ oraz $x_2 = \frac{1}{2}$. Punkt stały x_2 „przyciąga” za pomocą iteracji T^n wszystkie punkty z przedziału $(0, 1)$, tzn. dla każdego $x \in (0, 1)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = \frac{1}{2}$ (zamiast rachunków patrz na rysunek!). Pozostałe dwa punkty „przyciąga” punkt stały x_1 .

Inaczej wygląda sytuacja na rysunku 3. Funkcja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ (zdefiniowana na rysunku 3) ma dokładnie jeden punkt stały $x = \frac{1}{2}$. Ale ten punkt „nie przyciąga” za pomocą iteracji T^n żadnego punktu ze zbioru $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$.

Przykłady te sugerują, że dla zbieżności ciągu iteracyjnego $\{x_n = T^n x\}$ do punktu stałego odwzorowania T konieczne są dodatkowe założenia.

Twierdzenie 2. Niech będzie dana ciągła funkcja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ i $x \in [0, 1]$. Ciąg iteracyjny $\{x_n = T^n x\}$ jest zbieżny do punktu stałego odwzorowania T wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} |T^{n+1} x - T^n x| = 0$.

Dowód. Załóżmy, że $|T^{n+1} x - T^n x| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$ i ciąg iteracyjny $\{x_n = T^n x\}$ nie jest zbieżny. Wtedy z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa wynika, że istnieją takie podciągi zbieżne: $T^{n_i} x \rightarrow y_1$ oraz $T^{m_i} x \rightarrow y_2$, że $y_1 \neq y_2$. Dodatkowo podciągi te wybieramy tak, by $m_i > n_i$, $i = 1, 2, \dots$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy tak wybrać liczby naturalne n_{i_0} oraz $m_{j_0} > n_{j_0}$, by:

- 1) $|T^{n_i} x - y_1| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla $n_i \geq n_{i_0}$,
- 2) $|T^{m_i} x - y_2| < \frac{\varepsilon}{3}$ dla $m_i \geq m_{j_0}$,
- 3) $|T^{n+1} x - T^n x| < \frac{\varepsilon}{3(m_{j_0} - n_{i_0})}$ dla $n > n_{i_0}$.

Wtedy

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| &\leq |y_1 - T^{n_{i_0}} x| + |T^{n_{i_0}} x - T^{m_{j_0}} x| + |T^{m_{j_0}} x - y_2| \leq \\ &\leq |y_1 - T^{n_{i_0}} x| + \sum_{v=n_{i_0}}^{m_{j_0}-1} |T^{v+1} x - T^v x| + |T^{m_{j_0}} x - y_2| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + (m_{j_0} - n_{i_0}) \frac{\varepsilon}{3(m_{j_0} - n_{i_0})} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności wyboru $\varepsilon > 0$ wynika, że $y_1 = y_2$. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że ciąg iteracyjny $\{x_n = T^n x\}$ jest zbieżny. Niech $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x$. Wtedy x_0 jest punktem stałym odwzorowania T :

$$Tx_0 = T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1} x = x_0.$$

W drugą stronę implikacja jest oczywista. ■

Bernard Bolzano (1781 – 1848) – matematyk i filozof czeski.

Karl Teodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1898) – matematyk niemiecki.

Twierdzenie (Bolzano-Weierstrassa). Każdy ograniczony ciąg liczbowy zawiera podciąg zbieżny.

Można również rozważać bardziej skomplikowane iteracje. Na przykład, niech (t_n) będzie ciągiem liczb z przedziału $[0, 1]$, a ciąg iteracyjny opisujemy wzorem

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &\in [0, 1], \\ x_{n+1} &= (1 - t_n)x_n + t_n T x_n, \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Wówczas zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. Niech T będzie ciągłym odwzorowaniem przedziału $[0, 1]$ w siebie. Jeżeli ciąg iteracyjny określony wzorem (1) jest zbieżny do punktu z oraz $\sum t_n = \infty$, to z jest punktem stałym odwzorowania T .

Dla zilustrowania tego twierdzenia weźmy $t_n = \frac{1}{2}$. Oczywiście, $\sum t_n = \infty$, a więc otrzymujemy następujący

Wniosek. Niech T będzie ciągłym odwzorowaniem przedziału $[0, 1]$ w siebie. Określamy następujący ciąg. Niech $x_1 \in [0, 1]$, x_{n+1} zaś niech będzie środkiem odcinka o końcach x_n i Tx_n , czyli $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n)$. Wówczas, jeśli ciąg x_n jest zbieżny do punktu z , to z jest punktem stałym odwzorowania T .

Dowód twierdzenia 3 oraz dalsze fakty można znaleźć w pracy: D. Borwein i J. Borwein *Fixed point iterations for real functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 157, No. 1 (1991), 112-126.

Niestety, nawet te proste rezultaty nie przenoszą się na przypadek dwuwymiarowy. W odniesieniu do twierdzenia 2 pokazuje to następujący przykład:

Przykład. Niech $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Korzystając ze współrzędnych biegunowych (r, θ) określamy ciągłe odwzorowanie $T : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ wzorem

$$T(r, \theta) = \begin{cases} (0, 0) & \text{dla } r = 0, \\ \left(\frac{4}{3}r, \theta + \frac{1}{2}\right) & \text{dla } 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ ((2-r)^{-1}, \theta + (1-r)) & \text{dla } \frac{1}{2} < r \leq 1. \end{cases}$$

Geometryczny efekt tego odwzorowania jest następujący:

a) Punktami stałymi tego odwzorowania są punkty z brzegu koła oraz punkt $\{(0, 0)\}$.

b) Jeżeli $p = (r, \theta)$ jest punktem spełniającym warunek $0 < r \leq \frac{1}{2}$,

to punkt $T^N p = (\bar{r}, \bar{\theta})$ spełnia warunek $\frac{1}{2} < \bar{r} \leq 1$ dla dostatecznie dużego N .

c) Jeżeli $p = (r, \theta)$ jest punktem spełniającym warunek $\frac{1}{2} < r < 1$, odległym od brzegu koła o k^{-1} , wtedy punkt $Tp = (\hat{r}, \hat{\theta})$ jest punktem spełniającym warunek $\frac{1}{2} < \hat{r} < 1$, odległym od brzegu koła o $(k+1)^{-1}$ oraz (rys. 4)

$$\arg(Tp) = k^{-1} + \arg(p).$$

Z faktów tych wynika, że dla dowolnego $p \in B(0, 1)$, $|T^{n+1}p - T^n p| \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Jednak dla takiego punktu $p = (r, \theta)$, że $\frac{1}{2} < r \leq 1$ mamy

$$\arg(T^n p) = \arg(p) + \sum_{i=0}^{n-1} (k+i)^{-1}.$$

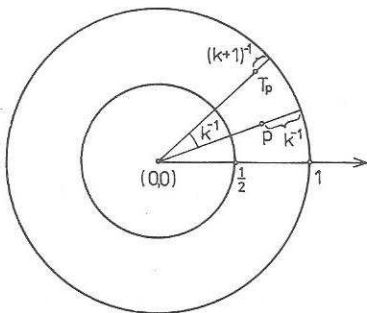
Zatem z rozbieżności szeregu $\sum_{i=0}^{\infty} (k+i)^{-1}$ wynika rozbieżność ciągu $\{x_n = T^n p\}$.

Jak widać, problem aproksymacji i lokalizacji punktów stałych, o których mowa w twierdzeniu Brouwera, jest zagadnieniem kłopotliwym i wciąż aktualnym.

Na koniec trochę optymizmu. W przypadku odwzorowań „więcej niż ciągłych” – na przykład odwzorowań lipschitzowskich ze stałą $L < 1$ mamy nie tylko istnienie punktu stałego, ale również wiemy, że taki punkt jest dokładnie jeden.

Odwzorowanie $T : A \rightarrow A$ nazywamy lipschitzowskim ze stałą $L > 0$, gdy dla dowolnych $x, y \in A$, $\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|$.

Ponadto możemy go aproksymować z dowolną dokładnością za pomocą iteracji opisanej w twierdzeniu 2 (*Delta* 8/1980). Problemy znowu się pojawiają, gdy rozważane odwzorowanie jest lipschitzowskie ze stałą $L \geq 1$, ale to już całkiem inna historia...



Rys. 4



Rozwiązanie zadania M 682.

Rozpatrzmy ciąg $a_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n} = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n$. Posługując się metodą indukcji łatwo wykazać, że $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$ (zatem wyrazy ciągu a_n to liczby całkowite, bowiem $a_0 = 2, a_1 = 10$). Stąd wynika, że $a_{n+2} + a_n$ dzieli się przez 10, a więc liczba

$$a_{n+4} - a_n = (a_{n+4} + a_{n+2}) - (a_{n+2} + a_n)$$

też jest podzielna przez 10. Oznacza to, że cyfra jedności każdej z liczb

$$a_0 = 2, a_4, a_8, a_{12}, \dots, a_{996}$$

jest taka sama, mianowicie równa 2. Zatem

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{1992} = a_{996} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1992}$$

ma cyfrę jedności 1, bowiem $0 < (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{1992} < 1$.



Rozwiązanie zadania F 367.

Fotony w świetle spolaryzowanym kołowo mają wyróżniony kierunek spinu. Całkowity moment pędu wiązki fotonów $J = nh = \frac{E}{h\nu} h = \frac{E}{2\pi\nu}$ (spin fotonu $s = \hbar$). Z zasady zachowania pędu mamy

$$\frac{1}{2} m r^2 \omega = \frac{E}{2\pi\nu},$$

$$\text{skąd } \omega = \frac{1}{\pi} \frac{E}{m r^2 \nu}.$$