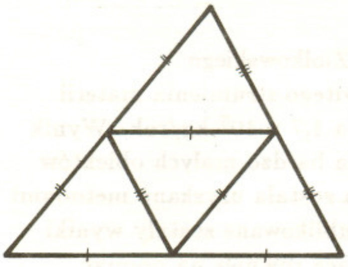
O czworościanie równościennym

Waldemar POMPE

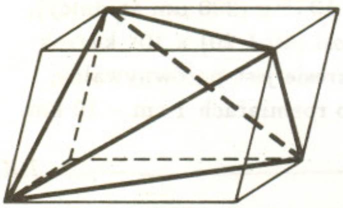
Czy istnieje czworościan, który nie jest foremny, a którego ściany są trójkątami przystającymi? Istnieje. Aby się o tym przekonać, wystarczy narysować dowolny nierównoboczny trójkąt ostrokątny, podzielić go na cztery przystające trójkąty, (jak na rysunku 1), i z otrzymanej w ten sposób siatki złożyć czworościan.



Rys. 1

Czworościan taki nazywamy **równościennym** bądź **półforemnym**. W *Delcie* 5/93 można przeczytać, że jeśli pola ścian czworościanu są równe (tzw. czworościan **równopolowy**), to czworościan jest równościenny. My udowodnimy nieco ogólniejsze twierdzenie, ale najpierw

Definicja. Przez każdą krawędź czworościanu $ABCD$ poprowadzono płaszczyznę równoległą do przeciwległej krawędzi. Otrzymano w ten sposób trzy pary równoległych płaszczyzn, które wyznaczają równoległościan. Równoległościan ten będziemy nazywać **dopisanym** do czworościanu $ABCD$ (rys. 2).



Rys. 2

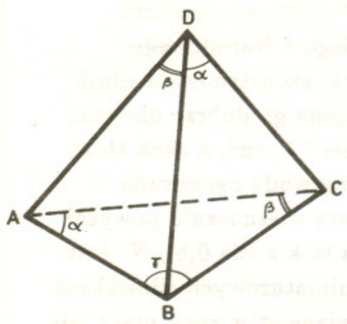
Twierdzenie. Wszystkie poniższe własności czworościanu $ABCD$ są równoważne (tzn. z dowolnej własności wynika każda inna):

1. wszystkie ściany są przystające,
2. wszystkie ściany to trójkąty ostrokątne o takim samym promieniu okręgu opisanego,
3. suma kątów płaskich przy każdym wierzchołku wynosi 180°,
4. sumy kątów płaskich przy wierzchołkach A, B, C wynoszą po 180°,
5. siatka czworościanu jest trójkątem ostrokątnym podzielonym na cztery przystające trójkąty (rys. 1),
6. $\angle BAC = \angle ABD = \angle ACD = \angle BDC$,
7. przeciwległe krawędzie są równej długości,
8. trzy odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi są parami prostopadłe,
9. równoległościan dopisany do czworościanu jest prostopadłościanem,
10. wszystkie ściany mają równe pola,
11. rzut czworościanu na dowolną płaszczyznę równoległą do dwóch przeciwległych krawędzi jest prostokątem,
12. każdy odcinek łączący środki przeciwległych krawędzi jest prostopadły do tych krawędzi.

Rys. 3

Dowód. Zamiast dowodzić $12 \cdot 11 = 132$ twierdzenia, udowodnimy jedynie 12. Schemat dowodu przedstawiony jest na rysunku 3.

1 ⇒ 2 (rys. 4). Ponieważ ściany są trójkątami przystającymi, więc promienie okręgów na nich opisanych są równe. Wystarczy zatem wykazać, że ściany są trójkątami ostrokątnymi. Ponieważ BC jest wspólnym bokiem trójkątów przystających ABC i BCD, więc $\angle BAC = \angle CDB = \alpha$. Analogicznie $\angle ACB = \angle ADB = \beta$ oraz $\angle ABC = \angle ADC = \gamma$. Kąty α, β, γ są kątami płaskimi przy każdym wierzchołku czworościanu, zatem mają tę własność, że suma dowolnych dwóch spośród nich jest większa od trzeciego. Ale jeśli kąty trójkąta mają ową własność, to musi to być trójkąt ostrokątny. Pozostaje więc zauważyć, że α, β, γ są kątami płaskimi każdej ściany.

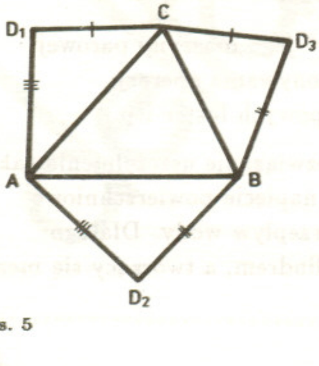


Rys. 4

2 ⇒ 3 (rys. 4). Jeśli promienie okręgów opisanych na ścianach ABC i BCD są równe, to $\angle BAC = \angle BDC$, gdyż są to kąty **ostre** (bardzo ważne założenie!) wpisane, oparte na tym samym łuku. Analogicznie $\angle ACB = \angle ADB$, $\angle ABC = \angle ADC$, skąd

$$\angle ADC + \angle CDB + \angle ADB = \angle ABC + \angle CAB + \angle ACB = 180^\circ .$$

3 ⇒ 4. Oczywiste.



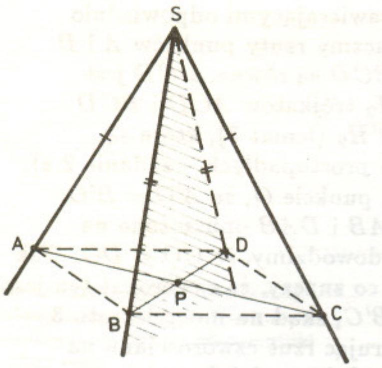
Rys. 5

4 ⇒ 5. Siatka czworościanu $ABCD$ jest sześciokątem $D_1AD_2BD_3C$ podzielonym na cztery trójkąty (rys. 5). Z własności **4** wynika, że punkt A leży na prostej D_1D_2, punkt B na prostej D_2D_3, punkt zaś C na prostej D_1D_3.

Zatem A, B, C są środkami boków trójkąta $D_1D_2D_3$. Pozostaje jeszcze zauważyć, że trójkąt $D_1D_2D_3$ jest ostrokątny. Istotnie, jego kąty są kątami płaskimi przy wierzchołku D, z czego wynika, że suma dowolnych dwóch spośród nich jest większa od trzeciego.

5 ⇒ 6. Oczywiste.

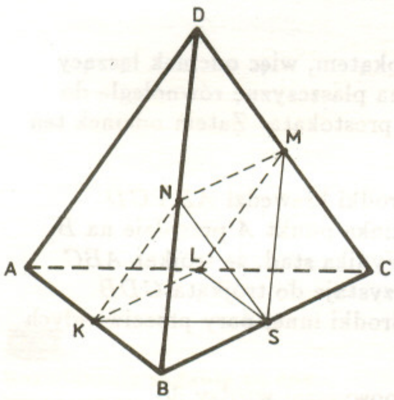
6 ⇒ 7. Udowodnimy najpierw dwa lematy.



Rys. 6

Lemat 1. *Dany jest wypukły kąt czwórścienny $SABCD$ o wierzchołku S. Można przeciąć go płaskim cięciem tak, aby w przekroju otrzymać równoległobok, przy czym wszystkie takie przekroje są równoległe.*

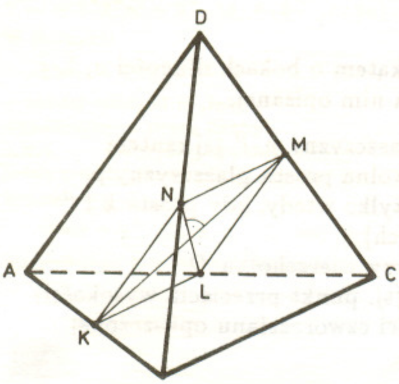
Dowód. Niech l będzie wspólną prostą płaszczyzn SAB i SCD, k zaś wspólną prostą płaszczyzn SBC i SAD. Przecinając dany kąt płaszczyzną równoległą do płaszczyzny wyznaczonej przez proste k i l otrzymamy w przekroju równoległobok – boki otrzymanego czworokąta będą bowiem równoległe do k bądź do l. Przecinając w inny sposób otrzymamy czworokąt, w którym przedłużenia przeciwległych boków przecinają się (na prostej k lub l).



Rys. 7

Lemat 2. *Dany jest wypukły kąt czwórścienny $SABCD$, przy którym wszystkie kąty płaskie są równe. Wówczas każdy przekrój tego kąta, będący równoległobokiem, jest rombem.*

Dowód. Udowodnimy najpierw, że taki kąt można tak przeciąć, aby w przekroju otrzymać romb. W tym celu wybierzmy tak punkty A i C, aby było $SA = SC$ (rys. 6). Niech P będzie punktem wspólnym prostej AC i płaszczyzny SBD. Nietrudno zauważyć, że punkty B i D można wybrać tak, aby $SB = SD$ i odcinek BD przechodził przez punkt P. Ponieważ kąty ASB, BSC, CSD, DSA są równe, więc trójkąty ASB, BSC, CSD, DSA są przystające, skąd otrzymujemy, że czworokąt $ABCD$ jest rombem. Z **lematu 1** wynika, że wszystkie przekroje będące równoległobokami są podobne (a nawet jednokładne). A ponieważ nasz kąt można tak przeciąć, aby w przekroju otrzymać romb, więc wszystkie przekroje będące równoległobokami będą także rombami.

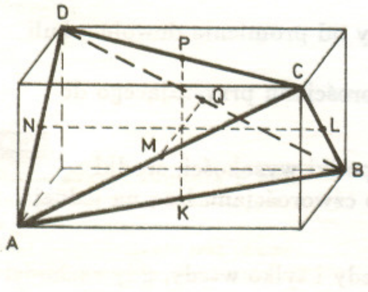


Rys. 8

Niech K, L, M, N, S będą odpowiednio środkami krawędzi AB, AC, CD, BD, BC (rys. 7). Nietrudno zauważyć, że $\angle KSN = \angle ACD$, $\angle NSM = \angle BDC$, $\angle MSL = \angle DBA$, $\angle LSK = \angle BAC$, co w połączeniu z założeniem daje $\angle KSN = \angle NSM = \angle MSL = \angle LSK$. Ponadto $KLMN$ jest równoległobokiem, ponieważ $KN \| AD \| ML$ i $KL \| BC \| MN$ (twierdzenie Talesa). Zatem na mocy **lematu 2**, $KLMN$ jest rombem, skąd wynika, że $AD = BC$ (gdyż $AD = 2KN = 2KL = BC$). Co więcej, z dowodu **lematu 2** wynika również, że $SN = SL$ i $SK = SM$, skąd $AB = CD$ i $AC = BD$.

7 ⇒ 8 (rys. 8). Niech K, L, M, N będą odpowiednio środkami krawędzi AB, AC, CD, BD. Czworokąt $KLMN$ jest oczywiście równoległobokiem (twierdzenie Talesa). Ponadto skoro $AC = BD$, to $KN = KL$. Zatem $KLMN$ jest rombem, co znaczy, że jego przekątne KM i NL są prostopadłe.

8 ⇒ 9 (rys. 9). Niech K, L, M, N, P, Q będą odpowiednio środkami krawędzi AB, BC, CA, AD, CD, BD. Płaszczyzny $KMPQ$, $NQLM$ i $KLPN$ przecinają się parami wzdłuż prostych KP, LN i QM, które są parami prostopadłe. Zatem płaszczyzny $KMPQ$, $NQLM$, $KLPN$ są również parami prostopadłe. A ponieważ każda z tych płaszczyzn jest równoległa do dwóch krawędzi, których nie przecina, więc równoległościan dopisany do czworościanu $ABCD$ jest prostopadłościanem.

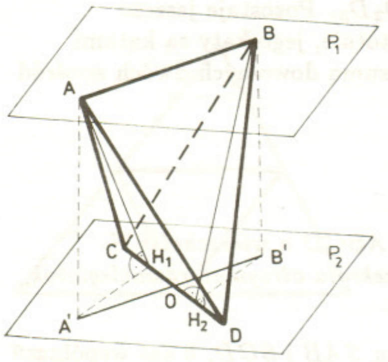


Rys. 9

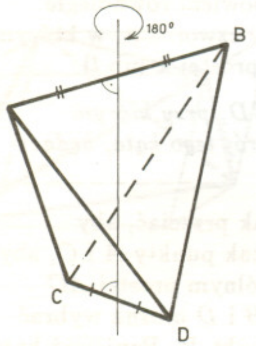
9 ⇒ 10. Z twierdzenia Pitagorasa wynika natychmiast, że ściany są trójkątami przystającymi. W szczególności mają równe pola.

10 ⇒ 11. Lemat 3. *Dane są dwie równoległe płaszczyzny p_1 i p_2 oraz punkty $A, B \in p_1$ i $C, D \in p_2$. Niech A' i B' będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów A i B na płaszczyznę p_2. Wówczas $AC = BD$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A'C = B'D$.*

Dowód bardzo prosty – przy użyciu twierdzenia Pitagorasa.



Rys. 10



Rys. 11

Niech p_1 i p_2 będą równoległymi płaszczyznami zawierającymi odpowiednio krawędzie AB i CD (rys. 10). Przez A' i B' oznaczmy rzuty punktów A i B na płaszczyznę p_2. Ponieważ pola ścian ACD i BCD są równe, a CD jest ich wspólną podstawą, więc wysokości AH_1 i BH_2 trójkątów ACD i BCD są równe. Równe są więc także odcinki $A'H_1$ i $B'H_2$ (lemat 3), które są również prostopadłe do CD (twierdzenie o trzech prostopadłych – zadanie 2.a). Zatem odcinki CD i $A'B'$ przecinają się w takim punkcie O, że $A'O = B'O$. Analogicznie rozpatrując wysokości trójkątów CAB i DAB opuszczone na wspólną podstawę i ich rzuty na płaszczyznę p_2, dowodzimy, że $CO = DO$. Tak więc przekątne czworokąta $A'DB'C$ połowią się, co znaczy, że czworokąt ten jest równoległobokiem. Zatem $A'C = B'D$ i $A'D = B'C$, skąd na mocy lematu 3 otrzymujemy, że $AC = BD$ i $AD = BC$. Rozpatrując rzut czworościanu na płaszczyznę równoległą do innej pary przeciwległych krawędzi dowodzimy, że $AB = CD$, skąd $A'B' = CD$. A ponieważ równoległobok, w którym przekątne są równej długości, jest prostokątem, więc czworokąt $A'DB'C$ jest prostokątem.

11 ⇒ 12. Ponieważ rzut czworościanu jest prostokątem, więc odcinek łączący środki przeciwległych krawędzi, po zrzutowaniu na płaszczyznę równoległą do tych krawędzi, zredukuje się do punktu – środka prostokąta. Zatem odcinek ten musi być prostopadły do tych krawędzi.

12 ⇒ 1 (rys. 11). Rozpatrzmy odcinek łączący środki krawędzi AB i CD. Przy obrocie czworościanu o 180° wokół tego odcinka punkt A przejdzie na B, punkt B na A, punkt C na D, punkt D na C. Wynika stąd, że trójkąt ABC przystaje do trójkąta ABD oraz trójkąt CDA przystaje do trójkąta CDB. Obracając czworościan wokół odcinka łączącego środki innej pary przeciwległych krawędzi otrzymujemy tezę.

Na koniec proponuję Czytelnikowi zastosowanie powyższej wiedzy do rozwiązania następujących zadań.

Zadania.

1. Każda ściana pewnego czworościanu jest trójkątem o bokach długości a, b, c. Znaleźć objętość czworościanu i promień sfery na nim opisanej.

2. a) Niech l będzie prostą nieprostopadłą do płaszczyzny p, l' jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę p, natomiast k dowolną prostą płaszczyzny p. Wykazać, że proste k i l są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy proste k i l' są prostopadłe (twierdzenie o trzech prostopadłych).

b) Wykazać, że jeśli wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku D czworościanu $ABCD$ są proste, to ortocentrum (tj. punkt przecięcia wysokości) trójkąta ABC pokrywa się ze spodkiem wysokości czworościanu opuszczonej z wierzchołka D.

3. Niech O_A, O_B, O_C, O_D będą odpowiednio środkami sfer dopisanych, stycznych do ścian BCD, ACD, ABD, BCA czworościanu $ABCD$. Wykazać, że trójścienne kąty O_ABCD, O_BACD, O_CABD, O_DABC są proste wtedy i tylko wtedy, gdy czworościan $ABCD$ jest równościenny. (Sfera dopisana do czworościanu to taka, która będąc styczną do wszystkich płaszczyzn zawierających ściany czworościanu jest z nim – poza punktem styczności – rozłączna.)

4. Wykazać, że w równościennym czworościanie

a) promień kuli wpisanej jest dwa razy mniejszy od promienia dowolnej kuli dopisanej do tego czworościanu,

b) środki kul dopisanych są wierzchołkami czworościanu przystającego do danego.

5. Wykazać, że w równościennym czworościanie spodki wysokości, środki wysokości i punkty przecięcia wysokości ścian tego czworościanu leżą na jednej sferze (sfera 12 punktów).

6. Wykazać, że czworościan jest równościenny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych warunków
– obwody ścian są równe,
– środki sfer – wpisanej i opisanej na tym czworościanie – pokrywają się.

Roswiązanie sadania F 877. Niech η_0, σ_0, p_0 oznaczają odpowiednio ciśnienie pary, ciśnienie pary nasyconej oraz ciśnienie powietrza w Zakopanem, η_1, σ_1, p_1 zaś odpowiednie wielkości na wysokości h względem Zakopanego. Ciśnienie zmienia się wraz z wysokością zgodnie ze wzorem $dp = -\rho g dh$, a z równania gazu doskonałego mamy $p = \frac{\rho}{\mu}RT$. Stąd po scałkowaniu i uwzględnieniu zmiany T wraz z wysokością otrzymujemy $p_1 = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_1}h}$. Stosunek ciśnień pary równa się stosunkowi ciśnień powietrza $\frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow \eta_1 = \eta_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_1}h}$. Całkując obustronnie równanie Clausiusa–Clapeyrona

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma} = \int \frac{C\mu}{RT^2} dT$$

otrzymujemy $\sigma_1 = \sigma_0 e^{A(1/T_0 - 1/T_1)}$, gdzie $A = \frac{C\mu}{R}$. Chmury występują na wysokości, na której wilgotność jest 100%, tj. $\eta_1 = \sigma_1$. Stąd $\eta_0 e^{-\frac{\mu g}{RT}h} = \sigma_0 e^{A(1/T_0 - 1/T_1)}$. Podstawiając $\epsilon = \frac{\eta_0}{\sigma_0}$ i uwzględniając, że $\epsilon = e^{\ln\epsilon}$, otrzymujemy

$$-\frac{\mu g}{RT}h + \ln\epsilon = A\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right),$$

$$T_1 = T_0 - ah,$$

skąd

$$h = \frac{-RT_0^2 \ln\epsilon}{aC\mu - \mu g T_0 - RT_0 a \ln\epsilon} = 1300\ \mathrm{m}.$$

Ostatecznie
$H = h + h_0 = 2100$ m n.p.m.