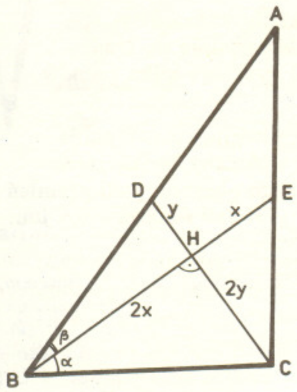
Kącik olimpijski (1)

Kącik olimpijski chciałby przedstawiać Czytelnikom *Delty* kilka przykładowo rozwiązanych zadań, wybranych przez nas z różnych olimpiad matematycznych i konkursów prowadzonych przez wiele czasopism matematycznych całego świata. Mamy nadzieję, że pomoże on młodym Czytelnikom biorącym udział w krajowej olimpiadzie przygotować się do zawodów, natomiast starszym Czytelnikom dostarczy kilku nowych zadań, przy których (naszym zdaniem) miło spędza się czas.

Pierwszy kącik chcielibyśmy poświęcić olimpijskim zadaniom geometrycznym.

Zadanie 1 (Olimpiada kanadyjska '93).

W trójkącie ABC środkowe poprowadzone do boków AB i AC przecinają się pod kątem prostym. Wykazać, że $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq 2/3$.



Rys. 1

Rozwiązanie I.

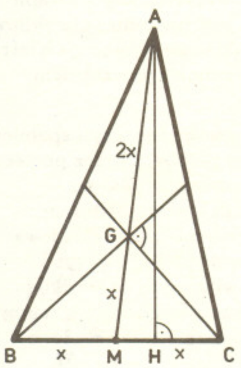
Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku 1. Wykorzystując fakt, że środkowe w dowolnym trójkącie przecinają się w stosunku 2 : 1, oraz wzór na kotangens sumy kątów dostajemy

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{(2x/2y)\cdot(2x/y) - 1}{(2x/2y) + (2x/y)} = \frac{2x^2 - y^2}{3xy}.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\operatorname{ctg} C = (2y^2 - x^2)/(3xy)$. Stąd

$$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{2x^2 - y^2 + 2y^2 - x^2}{3xy} = \frac{x^2+y^2}{3xy} \geq \frac{2xy}{3xy} = \frac{2}{3},$$

na mocy dobrze znanej nierówności $x^2 + y^2 \geq 2xy$. ■



Rys. 2

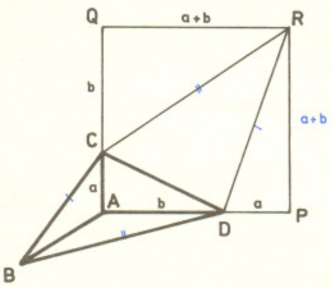
Rozwiązanie II.

Spójrzmy na rysunek 2. Punkt M jest środkiem odcinka BC, zatem jest również środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCG. Oznaczmy więc długość odcinków MB, MC, MG przez x. Stąd mamy

$$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{BH}{AH} + \frac{CH}{AH} = \frac{BC}{AH} \geq \frac{BC}{AM} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}. \ ■$$

Zadanie 2.

W czworościanie $ABCD$ kąty płaskie przy wierzchołku A wynoszą po 90°. Udowodnić, że jeśli $AB = AC + AD$, to suma kątów płaskich przy wierzchołku B wynosi 90°.



Rys. 3

Rozwiązanie (rysunek 3).

Niech P i Q będą punktami leżącymi na przedłużeniach krawędzi AD i AC, tak aby $AQ = AP = AB$. Rozważmy kwadrat $APRQ$, a w nim trójkąty RCD, RCQ, RDP. Trójkąty RPD i RQC są przystające odpowiednio do trójkątów BAC i BAD, a więc również trójkąt RCD jest przystający do trójkąta BDC. Stąd otrzymujemy

$$\angle CBA + \angle ABD + \angle CBD = \angle DRP + \angle QRC + \angle CRD = 90^\circ. \ ■$$

Na koniec zadanie dla Czytelników.

3. Udowodnić, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przekątne A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8, A_4A_{11} mają punkt wspólny.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE

Rozwiązanie zadania M 700. Niech $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$. Jeśli x jest liczbą parzystą, to wszystkie potęgi x o wykładniku naturalnym są parzyste, $x^l = 2m_l$ dla $l = 1, 2, \ldots$ i dla pewnych całkowitych m_l. Zatem

$$P(x) = 2(a_nm_n + a_{n-1}m_{n-1} + \cdots + a_1m_1) + a_0 = 2M + P(0)$$

jest liczbą nieparzystą, ponieważ $P(0) = a_0$ jest liczbą nieparzystą. Stąd wynika, że $P(x) \neq 0$ dla parzystych x.

Jeśli x jest nieparzyste, to rozumujemy podobnie jak poprzednio: mamy $x^l = 2k_l + 1$ dla $l = 1, 2, \ldots$ i dla pewnych całkowitych k_l. Otrzymujemy stąd

$$P(x) = 2(a_nk_n + a_{n-1}k_{n-1} + \cdots + a_1k_1) + a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0 = 2K + P(1),$$

a więc $P(x)$ jest liczbą nieparzystą, bowiem $P(1)$ jest liczbą nieparzystą. Zatem $P(x) \neq 0$ także dla x nieparzystych. Wielomian P nie ma więc pierwiastków całkowitych.