Całkiem prosta kosmologia

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

Rozwiązanie zadania M 702.
Liczba wszystkich podzbiorów jest równa 2^{3n}, liczba zaś podzbiorów, w których żadna z liczb nie dzieli się przez 3 jest równa 2^{2n}. Odpowiedź jest zatem $2^{3n} - 2^{2n}$.

Rozwiązanie zadania M 703.
Ponieważ $37 < 2 \cdot 19$, to

$$\left(\frac{37}{19}\right)^{19} < 2^{19} < 2^{20} = 16^5 < 19^5 .$$

Stąd mamy $37^{19} < 19^{19} \cdot 19^5 = 19^{24}$.

Rozwiązanie zadania F 382.
Załóżmy dla uproszczenia, że obracający się pulsar jest jednorodną kulą o promieniu R i masie $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Całkowita energia pulsara musi być mniejsza od zera

$$E = E_g + E_k + E_n < 0 ,$$

gdzie $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$ jest energią obrotową, E_g – energią grawitacyjną, E_n zaś jest energią odpychania neutronów; $E_n > 0$, stąd też

$$E_g + E_k < 0 .$$

Energię grawitacyjną możemy znaleźć odrywając kolejne warstwy pulsara i przenosząc je do nieskończoności

$$E_g = -\int_0^M \frac{\mathrm{G}m\mathrm{d}m}{r} ,$$

gdzie $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, $\mathrm{d}m = 4\pi r^2 \rho$, stąd

$$E_g = -\int_0^R \frac{\mathrm{G}(4\pi\rho)^2}{3} r^4 \mathrm{d}r .$$

Po obliczeniu całki i podstawieniu wyrażenia na masę otrzymujemy

$$E_g = -\frac{3}{5}\frac{\mathrm{G}M^2}{R} .$$

Podstawiając $I = \frac{2}{5}MR^2$ – moment bezwładności kuli, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ otrzymujemy

$$T > \sqrt{\frac{9\pi}{\mathrm{G}\rho}} = 1{,}26 \text{ ms} .$$

Kosmologia opisująca Wszechświat jako całość jest chyba najciekawszym działem fizyki (niektórzy sądzą, że astronomii). Wykorzystuje, niestety, relatywistyczną teorię grawitacji, inaczej – ogólną teorię względności, która, przy całym swoim pięknie, jest teorią, mówiąc najprościej, trudną i nawet dla znacznej części fizyków pozostaje „piękną nieznajomą". Okazuje się jednak, że niektóre rezultaty kosmologii można odtworzyć za pomocą znacznie nam bliższej teorii grawitacji Newtona. Poniżej przedstawię właśnie takie uproszczone modele Friedmana rozszerzającego się Wszechświata.

Wyobraźmy sobie cały Wszechświat jako kulę o masie M i promieniu R, a na powierzchni tej kuli cząstkę (tzw. cząstkę próbną) o masie m, która wraz z tą powierzchnią się porusza. Całkowita energia cząstki, będąca sumą energii kinetycznej i potencjalnej, jest stała w czasie i wyraża się wzorem

$$E = \frac{1}{2}m\dot{R}^2 - \frac{\mathrm{G}Mm}{R} , \tag{1}$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Kropka oznacza pochodną czasową, zatem $\dot{R}$ jest prędkością cząstki i jednocześnie prędkością rozszerzającego się bądź zapadającego się Wszechświata. Ze względu na przyciąganie grawitacyjne energia potencjalna cząstki jest, oczywiście, ujemna. Zapiszemy równanie (1) w postaci

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{\mathrm{G}M}{R} \tag{2}$$

z wielkością $\varepsilon = \dfrac{E}{m}$ będącą energią na jednostkę masy.

Rozwiążemy teraz równanie (2) dla trzech przypadków: $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$ i $\varepsilon > 0$, przyjmując, że w chwili początkowej promień Wszechświata jest zerowy, tzn. $R(0) = 0$. W przypadku zerowej energii cząstki łatwo zauważyć, że rozwiązanie ma postać

$$R = \left(\frac{9}{2}\mathrm{G}M\right)^{1/3} t^{2/3} . \tag{3}$$

Znalezienie rozwiązań dla niezerowej energii również nie jest bardzo trudne, lecz tutaj ograniczymy się jedynie do rozważań przybliżonych. Dla bardzo małych czasów, a więc i małych promieni, całkowita energia cząstki jest mała w porównaniu z jej energią potencjalną, która w chwili zerowej jest nieskończona. A zatem, przy rozważaniu początków Wszechświata możemy przyjąć w równaniu (2) $\varepsilon = 0$, co sprawia, że niezależnie od wielkości całkowitej energii cząstki próbnej początkowa faza ewolucji Wszechświata jest opisywana rozwiązaniem (3).

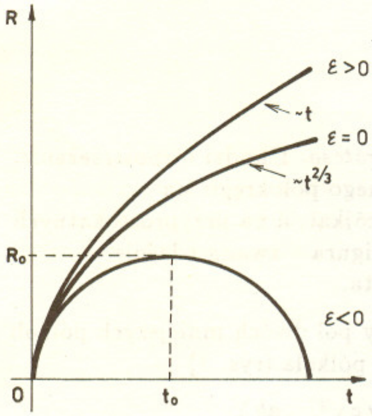
Rozwiązania dla dużych czasów zależą, oczywiście, istotnie od wielkości energii całkowitej. Jeśli energia ta jest dodatnia, mamy przewagę energii kinetycznej nad potencjalną i oczekujemy nieograniczonej ekspansji Wszechświata. Rzeczywiście, przy dostatecznie dużych promieniach energia potencjalna staje się bardzo mała w porównaniu z energią całkowitą. Gdy w równaniu (2) pominiemy energię potencjalną, rozwiązaniem będzie funkcja

$$R = \sqrt{2\varepsilon} \cdot t .$$

Mamy więc dla dużych czasów liniowy wzrost promienia Wszechświata.

Jeżeli całkowita energia jest ujemna, energia potencjalna dominuje w równaniu (2). A zatem grawitacja powstrzyma rozszerzanie się Wszechświata. Maksymalny promień zostanie osiągnięty, gdy prędkość, a z nią energia kinetyczna, spadnie do zera. Tak więc jest on równy

$$R_0 = \frac{\mathrm{G}M}{|\varepsilon|} .$$



Prześledźmy, co się dzieje z naszym Wszechświatem, gdy jest on bliski swego największego rozmiaru. Rozwijamy w tym celu promień jako funkcję czasu w szereg Taylora wokół czasu t_0, przy którym promień jest największy

$$R = R_0 + \frac{1}{2}\ddot{R}(t_0)(t - t_0)^2 .$$

Ponieważ przy $t = t_0$ promień osiąga maksimum i pierwsza pochodna znika, pominęliśmy ją w rozwinięciu. Podstawiając powyższe wyrażenie do równania (2) znajdujemy rozwiązanie

$$R = R_0 - \frac{\mathrm{G}M}{2R_0}(t - t_0)^2 .$$

Widzimy, że po osiągnięciu największego rozmiaru Wszechświat zaczyna się zapadać. Ostatecznie skurczy się do punktu.

Opisane trzy rozwiązania równania (2), przedstawione na rysunku, a odpowiadające trzem modelom Friedmana znalezionym jako rozwiązania równań Einsteina ogólnej teorii względności, mają niezwykle ważną własność, szczególnie łatwą do zaobserwowania dla rozwiązań z zerową energią. Gęstość masy Wszechświata

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{6\pi \mathrm{G}} \frac{1}{t^2} \tag{4}$$

nie zależy ani od jego masy, ani od promienia, a tylko od czasu i stałej grawitacji. Podobnie jest ze stałą Hubble'a H, którą określimy tutaj jako współczynnik proporcjonalności między prędkością rozszerzania się Wszechświata a jego promieniem, tzn.

$$\dot{R} = \mathrm{H}R .$$

Dla rozwiązania z zerową energią znajdujemy

$$\mathrm{H} = \frac{2}{3}\frac{1}{t} . \tag{5}$$

Ponieważ na cząstkę próbną działa tylko masa znajdująca się wewnątrz sfery, na której ta cząstka się znajduje, wyniki naszych rozważań nie ulegną zmianie, jeśli rozważymy cząstkę w dowolnym miejscu Wszechświata. Jedynie będziemy interpretować R i M nie jako promień Wszechświata i jego masę, ale jako radialne położenie cząstki i masę Wszechświata zamkniętą w sferze o promieniu R. Widzimy jednak, że dwie obserwowalne wielkości charakteryzujące Wszechświat – gęstość masy i stała Hubble'a – od parametrów R i M nie zależą.

Ponieważ gęstość masy Wszechświata i stała Hubble'a zależą jedynie od znanej stałej grawitacji, wieku Wszechświata t i energii ε, moglibyśmy znając ρ i H wyznaczyć te dwie wielkości i rozstrzygnąć, czy Wszechświat będzie się w nieskończoność rozszerzał, czy też kiedyś zacznie się kurczyć. Niestety, gęstość masy i stała Hubble'a znane są niezbyt dokładnie. A mianowicie

$$\rho = (1 \div 5) \cdot 10^{-31}\ \mathrm{g/cm^3}, \quad \mathrm{H} = (50 \div 100)\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s \cdot Mpc}} .$$

Sprawia to, że żadnego z trzech modeli wykluczyć nie możemy. W szczególności, związek między gęstością i stałą Hubble'a, który otrzymujemy w modelu o zerowej energii eliminując czas z równań (4) i (5), tzn.

$$\rho = \frac{3\mathrm{H}^2}{8\pi \mathrm{G}} ,$$

jest w przybliżeniu spełniony.

Podstawiając do równania (5) wartość stałej Hubble'a otrzymujemy wiek Wszechświata z przedziału 6,5–13 mld lat, co uwzględniwszy prostotę naszych rozważań, jest wynikiem zdumiewająco rozsądnym, bo w przybliżeniu zgodnym z wyrafinowaną analizą rozwiązań równań Einsteina. Oceny wieku Wszechświata otrzymywane na podstawie wieku gwiazd, czy też rozpowszechnienia pierwiastków radioaktywnych dają wielkości między 10 a 20 mld lat. Opisany tutaj model Wszechświata jest więc użyteczny nie tylko przy jakościowej, ale i ilościowej analizie problemów kosmologicznych.