epsilon

8/94
(42)

Kuzyn trójkąta Pascala

Młody Carl Friedrich Gauss poradził sobie z pozornie niewdzięcznym zadaniem sumowania kolejnych liczb naturalnych od 1 do 100 w niezwykle pomysłowy sposób: $1+2+\ldots+100=(1+100)+(2+99)+\ldots+(50+51)=$ $=50\cdot 101$. Dla nas będzie istotne, że suma ta wyraża się symbolem Newtona $\binom{101}{2}$. Wśród zadań na wykorzystanie indukcji matematycznej pojawia się wzór na sumę kwadratów w postaci: $1^2+2^2+\ldots+n^2=\binom{n+1}{3}+\binom{n+2}{3}$. Jeśli ktoś miałby kłopoty ze sprawdzeniem tego wzoru dla $n=1$, niechaj weźmie pod uwagę, że $\binom{2}{3}=0$, jako że zbiór dwuelementowy nie ma żadnych podzbiorów trójelementowych. A gdyby tak pójść dalej i zapytać, czy

$$(*)\qquad 1^k+2^k+\ldots+n^k=\sum_{i=1}^{k} a_{k,i}\cdot\binom{n+i}{k+1}$$

dla $k=1,2,\ldots,$

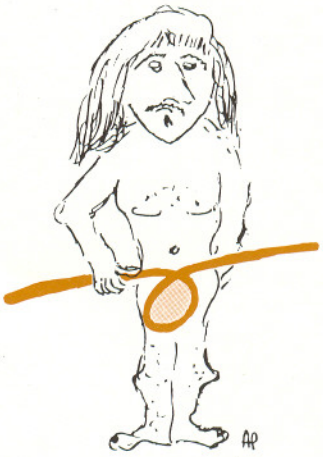
gdzie $a_{k,i}$ są pewnymi, nie znanymi na razie współczynnikami? Pamiętajmy, że w tej chwili nie tylko nie znamy wartości tych współczynników, ale w ogóle nie mamy pewności, czy one istnieją. Jeśli jednak istnieją, to są określone jednoznacznie i łatwo je można wyznaczać. Wymaga to nieco pracy, ale gdy już ustawimy otrzymane współczynniki w taki sposób, aby $a_{k,i}$ występowało na i-tym miejscu k-tego wiersza, to oczom naszym ukaże się następujący trójkąt:

```
                        1      ↙ prawy skos nr 2
                    1       1
lewy skos nr 4 ↘  1       4       1
                1     11      11     1
              1     26      66     26     1
            *     *     *     *     *     *
```

Nie sposób oprzeć się przekonaniu, że istnieje jakaś zasada, w oparciu o którą zbudowany jest ten trójkąt. Ba, ale jaka? W 1976 roku podzieliłem się tą zagadką z ówczesnym ośmioklasistą, obecnie wykładowcą Papieskiej Akademii Teologicznej w Krakowie, Jackiem Dembkiem, który odgadł regułę:

(**) Każdy wewnętrzny element trójkąta otrzymasz przez dodanie dwóch jego górnych sąsiadów (lewego i prawego) pomnożonych odpowiednio przez numer lewego (prawego) skosu, w którym się on znajduje (na przykład $26=4\cdot 1+2\cdot 11$).

Wizualizacja Matematyki



Liść Kartezjusza

Teraz możliwy już jest dowód (*), który pozostawiam Czytelnikom.

Dzisiaj wydaje mi się, że bardziej naturalną drogą do odgadnięcia tajemnicy trójkąta byłaby interpretacja jego elementów. Suma k-tego wiersza wynosi $k!$, nasuwa się więc przypuszczenie, że $a_{k,j}$ jest liczbą permutacji zbioru k-elementowego mających pewną własność zależną od j. Zbiór permutacji zbioru 3-elementowego składa się z identyczności, trzech transpozycji i dwóch cykli długości 3. Ale w trzecim wierszu mamy rozkład (1,4,1), nie zaś (1,3,2) – szukana własność powinna więc rozróżniać pewne cykle tej samej długości, a zatem musi zależeć od pewnej dodatkowej struktury w zbiorze k-elementowym, na przykład od porządku. Dopiero teraz pozwolimy sobie na odgadnięcie. Niech $K=\{1,2,\ldots,k\}$. Przez odcinek w zbiorze K będziemy rozumieli każdy zbiór $\{x\in K: m\le x\le n\}$, gdzie $m,n\in K$. Okazuje się, że

(***) $a_{k,j}$ jest liczbą tych permutacji σ zbioru K, dla których istnieje dokładnie j maksymalnych odcinków w zbiorze K, na których funkcja σ jest rosnąca.

Sprawdzenie, że tak określone elementy $a_{k,j}$ spełniają regułę (**), pozostawiam jako zadanie.

Dariusz MIKLASZEWSKI

REMINISCENCJE EGZAMINÓW WSTĘPNYCH NA MATEMATYKĘ

Po dyskusji związanej z zadaniami wylosowanymi przez kandydatkę egzaminatorzy rozpoczynają rozmowę na inne tematy.
Egzaminator: – Czy interesowała się Pani matematyką poza programem szkolnym? Czytała Pani coś?
Kandydatka: – ...
Egzaminator: – Z *Deltą* się Pani może zetknęła? Wie Pani, co to jest?
Kandydatka (*radośnie*): – Tak! Wyróżnik trójmianu kwadratowego, b^2-4ac!
Następna kandydatka. Po dyskusji na temat zadań pada standardowe pytanie.
Egzaminator: – Czy interesowała się Pani matematyką poza programem szkolnym?
Kandydatka: – Ja słyszałam, jak pan pytał o to koleżankę, więc ja czytam *Deltę*. A ponieważ się wybieram na UJ, to najbardziej interesuje mnie taki śmieszny dodatek, to robią ludzie z UJ, on się chyba nazywa *CEJLON* albo jakoś tak...

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.