

# Na granicy prawa

Jan GAJ

Postępowanie na granicy prawa zyskało sobie w ostatnich latach w naszym kraju wielką popularność, co jest niewątpliwym postępem, gdyż jeszcze kilka lat temu granica ta, w odróżnieniu od granic państwowych, nie była zbyt starannie strzeżona i nikt zbyt poważnie prawa nie traktował. Domyślasz się jednak, Czytelniku, że nie będziemy się zajmowali działalnością polityków i prawem karnym ani cywilnym. Chodzi mi, oczywiście, o prawa fizyki. Często słyszymy ostrzeżenia, żeby stosując te prawa pilnie zważać, czy założenia, przy których je sformułowano, są spełnione. Zaniedbanie tej ostrożności prowadzi bowiem do przykrych konsekwencji w postaci fałszywych wniosków, jak na przykład stwierdzenie, że prawdopodobieństwo zajmowania stanu podstawowego przez atom wodoru jest równe zero (zob. *Delta* 10/1987). Zagadnienie to ma jednak drugą, bardzo interesującą stronę. Otóż, niektóre prawa fizyki czy – w skromniejszym wymiarze – modele teoretyczne obowiązują zaskakująco daleko od zakresu, w którym obowiązywać powinny. Żeby nie być gołosłownym, chciałbym dziś zaproponować Ci, Czytelniku, przyjrzenie się z bliska jednemu z takich przypadków. Dotyczy on jednego z podstawowych praw fizyki statystycznej, jakim jest

## rozkład kanoniczny.

Zacznijmy od założeń. Rozkład kanoniczny wyraża prawdopodobieństwo zajęcia określonego stanu przez układ fizyczny przy założeniu, że układ ten jest słabo sprzężony z termostatem, czyli dużym układem pozostającym w równowadze termodynamicznej. Na przykład, gdyby układem była kulka przywiązana sprężynką do ciężkiego obiektu (termostatu) i energia układu (energia kinetyczna kulki) byłaby porównywalna z energią oddziaływania układ-termostat (energia potencjalna sprężynki), to założenie stosowalności rozkładu kanonicznego nie byłoby spełnione. Rozkład kanoniczny można wyrazić wzorem

$$(1) \quad P_\alpha = Ae^{-E_\alpha/kT},$$

gdzie  $P_\alpha$  jest prawdopodobieństwem tego, że układ znajdzie się w stanie  $\alpha$ ,  $E_\alpha$  jest energią tego stanu,  $A$  jest stałą,  $e = 2,71 \dots$  jest podstawą logarytmów naturalnych,  $k \approx 1,38 \times 10^{-23}$  J/K jest stałą Boltzmanna, a  $T$  – temperaturą (w skali Kelvina). Inaczej mówiąc, prawdopodobieństwo tego, że układ zajmie jakiś stan, jest proporcjonalne do liczby  $e$  podniesionej do pewnej potęgi. Wykładnik tej potęgi jest ujemny, wprost proporcjonalny do energii rozważanego stanu i odwrotnie proporcjonalny do temperatury. Układ fizyczny, dla którego formułujemy to prawo, może być dowolny, aby tylko był dobrze wyodrębniony i spełniał wymienione na wstępie założenie. Przejdźmy teraz do następnego kroku, którym będzie

## bezprawne zastosowanie rozkładu kanonicznego.

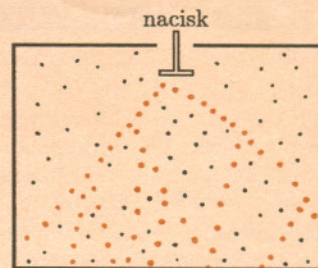
Zastosujemy go do zjawiska parowania wody. Model, w którym spróbujemy opisać to zjawisko, jest następujący. Naszym układem fizycznym będzie cząsteczka wody. Może ona przebywać w cieczy lub w części naczynia nad cieczą, wypełnionej parą nasyconą. Energia cząsteczki zależy tylko od tego, czy znajduje się ona w cieczy czy w parze, a różnica między jej wartościami dla obu tych stanów to po prostu ciepło parowania przypadające na jedną cząsteczkę.

# Rozchodzenie się dźwięku w materiałach sypkich

Maria

## MASSALSKA-ARODŹ

W poprzednim artykule na temat materiałów sypkich (patrz *Delta* 2/1995) zwróciłam uwagę na fakt, że przy opisie stanu skupienia, w jakim znajduje się układ sypki, bardzo istotną wielkością jest parametr geometrycznego upakowania  $u$ , czyli ułamek wypełnienia objętości próbki przez ziarna. Może on przyjmować różne wartości w zależności od warunków, w jakich umieścimy analizowaną próbkę. Ciekawy był fakt, że układ tracił swoją mechaniczną stabilność i zaczynał przejawiać cechy typowe dla stanu ciekłego, jeśli parametr upakowania był mniejszy niż wartość  $u_{\min} = 0,52$  (przepraszamy za błąd w *Delcie* 2/1995). Okazuje się jednak, że problem upakowania ziaren w układzie sypkim jest bardziej złożony. Szczegółowa analiza rozłożenia ziaren piasku pozwala stwierdzić, że nie są to układy o jednorodnym upakowaniu. Aby się o tym przekonać, wykonano następujące doświadczenie: kuleczki o własnościach elastooptycznych, które na nacisk reagują zmianą współczynnika załamania światła, wsypano do płaskiego naczynia i poddano ścisłaniu (tłok ma średnicę znacznie mniejszą niż średnica naczynia – rys. 1).



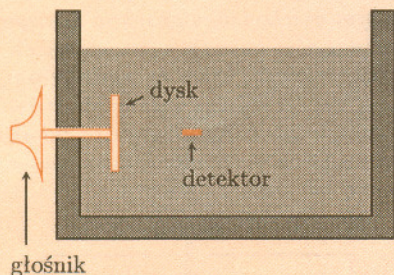
Rys. 1

Pod wpływem nacisku kulki skreślały płaszczyzną polaryzacji światła i w odpowiednio dobranych warunkach mogły być obserwowane w świetle spolaryzowanym jako jasne punkty – na rysunku 1 są to kropki kolorowe. Okazało się, że jasne punkty tworzą ciągłą, bardzo złożoną sieć wypełniającą całe naczynie. A więc wywierany na układ nacisk był przenoszony nie przez wszystkie kulki, ale przez sieć bardzo gęsto



upakowanych kulek, które tworzyły w układzie konstrukcję nośną. Pod łukami, lub w przypadku trójwymiarowym – pod sklepieniami takiej konstrukcji istnieją obszary bardzo luźno upakowanych ziaren, które w ogóle nie doznają nacisku. Jest to zachowanie odmienne od obserwowanego przy ściskaniu zarówno próbek ciekłych, jak i stałych. Okazuje się, że również w swobodnej masie piasku, nie poddanej naciskowi, mamy do czynienia z podobną architekturą, która powstaje samoistnie. Takie sklepienia z gęsto upakowanych ziaren, pod którymi znajdują się obszary o ziarnach luźno upakowanych, zapewniają układowi sypkiemu stabilność mechaniczną.

Rozłożenie ziaren w materiałach sypkich jest zatem niejednorodne, co oznacza, że uporządkowanie ich nie jest całkowicie przypadkowe. Obecność konstrukcji nośnych o bardzo złożonej, hierarchicznej budowie pozwala wytłumaczyć zaskakujące zachowanie się dźwięku, jakie stwierdzono w doświadczeniu przeprowadzonym niedawno na uniwersytecie w Chicago [1]. W naczyniu wypełnionym szklanymi kulkami (o średnicy 0,5 cm) umieszczono aluminiowy dysk (o średnicy 7 cm) połączony sztywnym prętem z głośnikiem (rys. 2).



Rys. 2

Detektor o wielkości porównywalnej z rozmiarem kulek został umieszczony w odległości 6 cm od źródła drgań. Mierzoną wielkością było przyspieszenie detektora. Głośnik wykonywał drgania harmoniczne  $A_s(t) = A_s \sin(2\pi\nu_0 t)$  o częstotliwości  $\nu_0 = 4$  kHz i stałej amplitudzie przyspieszenia  $A_s = 1,4$  g ( $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>). Tak więc siła, z jaką głośnik działał na otaczające go kulki, była niewiele większa od ich ciężaru. Drgania, które w otoczeniu źródła były sinusoidalne, w pewnej odległości od niego przestały być regularne, pomimo że układ starannie odizolowano od otoczenia. Drgania rejestrowane przez detektor można opisać wzorem:  $A(t) = A_d(t) \sin(2\pi\nu_0 t + \phi(t))$ . Jego amplitudę przedstawia rysunek 3.

Podstawowe założenie, które w oczywisty sposób nie jest tu spełnione, to słabość sprzężenia między cząsteczką a termostatem, którym, oczywiście, będzie całe naczynie z wodą. Przecież parowanie polega na wyrwaniu cząsteczki z zasięgu sił utrzymujących ją w kontakcie z innymi cząsteczkami cieczy, trudno więc mówić o słabym sprzężeniu w takiej sytuacji. Zlekceważmy jednak to nie spełnione założenie i spróbujmy doświadczalnie sprawdzić stosowalność w tym przypadku rozkładu kanonicznego. Miarą prawdopodobieństwa znajdowania się cząsteczki w określonym stanie jest liczba cząsteczek na jednostkę objętości (ściślej mówiąc – będzie to gęstość prawdopodobieństwa na jednostkę objętości), do której jest proporcjonalna gęstość cieczy lub pary:  $\varrho = CP$ . Logarytmując obustronnie wzór (1), reprezentujący rozkład kanoniczny, otrzymujemy

$$\ln \varrho_c = \ln C + \ln A - \frac{E_c}{kT}$$

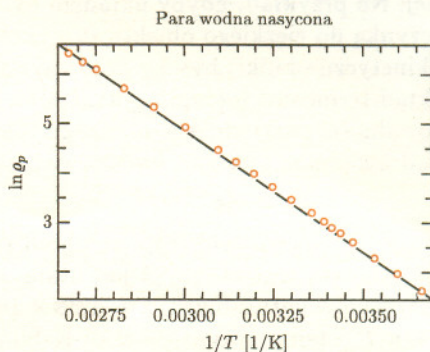
oraz

$$\ln \varrho_p = \ln C + \ln A - \frac{E_p}{kT}$$

odpowiednio dla cieczy i pary. Jeżeli teraz odejmiemy te równości stronami, to otrzymamy po prostym przekształceniu

$$\ln \varrho_p = \ln \varrho_c - \frac{E_p - E_c}{kT}$$

A więc przedstawiając na wykresie logarytm gęstości pary nasyconej wody w zależności od odwrotności temperatury powinniśmy otrzymać prostą o nachyleniu  $-(E_p - E_c)/k$ . Poniższy rysunek przedstawia taką zależność na podstawie danych zaczerpniętych z książki H. Szydłowskiego *Pomiary fizyczne* (PWN, Warszawa 1977).



$\ln \varrho_p = -4902 \frac{1}{T} + 19,6$ ; maksymalne odchylenie 0,0442.

Widać, że punkty doświadczalne pięknie układają się w prostą. A więc postać zależności zgadza się z przewidywaną przez rozkład kanoniczny. A co z wartością nachylenia? Nachylenie prostej znalezione metodą najmniejszych kwadratów wynosi 4902 K. Obliczmy je używając znanej wartości ciepła parowania wody  $Q = 2260$  J/g, jej masy molowej  $m = 18$  g oraz liczby cząsteczek w molu  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ .

$$\frac{E_p - E_c}{k} = \frac{Qm}{N_A} = \frac{Qm}{kN_A} = \frac{2260 \left[ \frac{\text{J}}{\text{g}} \right] \cdot 18 [\text{g}]}{1,38 \times 10^{-23} \left[ \frac{\text{J}}{\text{K}} \right] \cdot 6,02 \times 10^{23}} = 4910 [\text{K}]$$

A więc doświadczenie potwierdza ze zdumiewającą dokładnością przewidywanie oparte na fałszywym założeniu! W tym miejscu żaden miłośnik logiki nie wytrzyma dłużej i zawoła

**ależ to wszystko bzdura!**



Na podstawie fałszywego założenia mogą udowodnić wszystko, a więc powyższy wynik o niczym nie świadczy! Taka postawa, niezbędna na przykład w matematyce, jest, niestety, nie do utrzymania w fizyce, w której nigdy niczego nie wiemy z całkowitą pewnością. Jediną dostępną fizykowi metodą sprawdzania słuszności swoich teorii jest wysnuwanie z nich wniosków, które dadzą się bezpośrednio skonfrontować z doświadczeniem. Właśnie to przed chwilą zrobiliśmy. Zamiast więc biadać nad nędzą logiczną metod działania fizyków, spróbujmy zastanowić się, dlaczego uzyskaliśmy tak dokładną zgodność z doświadczeniem teorii, która nie ma prawa się stosować. Pozostawiam Cię, Czytelniku, z tym problemem i zapraszam do listownych komentarzy. Najlepsze nagrodzimy książkami.



## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

**M 741.** Wykazać, że jeśli istnieje ograniczony podzbiór  $A$  przestrzeni  $\mathbf{R}^n$  o średnicy 1, który nie da się podzielić na  $n$  części o średnicy mniejszej od 1, to istnieje również ograniczony podzbiór wypukły  $B$  przestrzeni  $\mathbf{R}^n$  o tej samej własności. (Por. artykuł *Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty* na str. 5).

Rozwiązanie na str. 7

**M 742.** Znaleźć choć jedną liczbę  $n > 1$  o tej własności, że pewnego zbioru w  $\mathbf{R}^n$  o średnicy równej 1 nie można rozłożyć na mniej niż  $n^2$  części o średnicy mniejszej od 1. (Por. artykuł *Problem Borsuka o Podziale rozstrzygnięty* na str. 5).

Rozwiązanie na str. 7

Zadania nr 741 i 742 zaproponowała Danuta KOŁODZIEJCZYK

**M 743.** W artykule Jarosława Górnickiego *Kilka słów o powierzchniach* (str. 10) opisana jest wstęga Möbiusa. Czy można z niej wyciąć torus? A czy z torusa można wyciąć wstęgę Möbiusa?

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Adam KOROCIŃSKI

**F 407.** Jeśli żelazny pręt o długości 1 m ogrzejemy od  $0^\circ\text{C}$  do  $300^\circ\text{C}$ , to zgodnie ze znanym wzorem na rozszerzalność termiczną ciał  $L = L_0(1 + \alpha \cdot \delta T)$  stwierdzimy, że długość pręta powinna wzrosnąć do  $L_{300} = 1,0039$  m ( $\alpha_{\text{Fe}} = 1,3 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$  dla tego zakresu temperatur).

Z kolei, jeśli ochłodzimy go z powrotem do temperatury początkowej, to na podstawie tego samego wzoru – z ujemną zmianą temperatury oraz  $L'_0 = L_{300}$  – przewidujemy, że długość pręta w temperaturze  $0^\circ\text{C}$  wyniesie  $0,9999848 \dots$  m!

Wyjaśnić, co jest źródłem powyższego „paradoksu”.

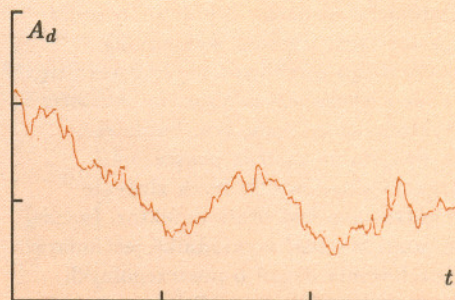
Rozwiązanie na str. 16

**F 408.** Dysponując gumą do skoków na uwięzi chcemy, aby skoczek o masie 40 kg obciążony workiem z piaskiem o masie 10 kg zanurzył się po skoku „do pasa” (wysokość jego środka ciężkości) w rzecze.

Jak długą gumę należy zastosować, jeśli lustro rzeki znajduje się 20 m poniżej poziomu, z którego startuje skoczek i na którym przymocowana jest guma? Na jaką wysokość wzniesie się skoczek, jeśli upuści on worek w dolnym położeniu? Jakie będzie maksymalne przyspieszenie, którego doświadczy skoczek?

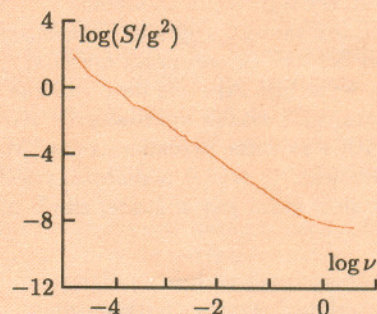
Zakładamy, że do gumy stosuje się prawo Hooke’a, iloczyn modułu Younga i przekroju poprzecznego gumy jest stały i wynosi 500 N, oraz że uprząż utrzymuje skoczka głową do góry. Przyjmujemy  $g = 10 \text{ m/s}^2$  oraz zaniedbujemy opory ruchu.

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 3

W przypadku substancji w stanie stałym lub ciekłym zarejestrowane drgania byłyby drganiami harmonicznymi o tej samej częstotliwości, a jedynie mniejszej amplitudzie. W przypadku materiałów sypkich jest całkiem inaczej. Zmiany amplitudy drgań obserwowane w trakcie upływu czasu mają charakter bardzo chaotyczny, co sugeruje, że sygnał odbierany przez detektor jest superpozycją wielu drgań harmonicznymi o różnych częstotliwościach i amplitudach. Aby się o tym przekonać, wygodnie jest przedstawić otrzymane wyniki w nieco innej postaci.



Rys. 4

Rysunek 4 pokazuje tak zwane widmo mocy w skali podwójnie logarytmicznej. Widmo mocy jest zdefiniowane jako kwadrat modułu transformaty Fouriera amplitudy drgań

$$S(\nu) = \left| \int A_d(t) \exp(-2\pi\nu t) dt \right|^2.$$

Zależność  $\log S(\nu)$  od  $\log \nu$  jest wyraźnie liniowa w szerokim zakresie częstotliwości, od  $10^{-5}$  Hz do 1 Hz. Oznacza ona, że  $S(\nu) \sim \nu^{-2}$ . Jest to zachowanie niezwykle. Oznacza ono, że drgania detektora (czyli w przybliżeniu drgania każdego z ziaren) obserwowane na rysunku 3 jako sygnał chaotyczny podobny do szumu) są złożeniem drgań o wszystkich częstotliwościach z zakresu ponad 5 dekad, których amplitudy cechuje pewna regularność. Istotną informację niesie wartość wykładnika potęgi oszacowanego z nachylenia prostej z rysunku 4. Dla tzw. białego szumu, będącego