Kącik olimpijski (11)

Dowody kombinatoryczne

Często musimy udowodnić równość, w której występują tzw. symbole Newtona $\binom{n}{k}$. Na przykład

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Jednym ze sposobów dowodzenia takich tożsamości jest przeprowadzenie tzw. dowodu kombinatorycznego. Polega on na tym, że zliczamy na dwa sposoby elementy jakiegoś odpowiednio dobranego zbioru. Obie strony równości wyrażają właśnie tę liczbę elementów, postać każdej strony zależy od sposobu zliczania. Liczba elementów zbioru, oczywiście, nie zależy od sposobu zliczania, więc mamy równość. Oto dowód kombinatoryczny powyższej równości.

Mamy n osób i chcemy spośród nich wybrać grupę co najmniej jednoosobową, która wyjedzie na wycieczkę. Oczywiście, musimy też wybrać kierownika tej grupy. Na ile sposobów można to zrobić? Możemy najpierw zdecydować, ile osób chcemy wybrać. Przypuśćmy, że chcemy wybrać k osób; oczywiście, $1 \leq k \leq n$. Z definicji symbolu Newtona k osób spośród n osób możemy wybrać na $\binom{n}{k}$ sposobów, kierownika grupy na k sposobów. Zatem k-osobową grupę z kierownikiem możemy wybrać na $k \cdot \binom{n}{k}$ sposobów. Teraz wystarczy dodać te liczby (dla k od 1 do n), by stwierdzić, że lewa strona równości wyraża właśnie tę szukaną liczbę sposobów. Prawą stronę otrzymamy zliczając te sposoby wyboru w inny sposób. Najpierw możemy wybrać kierownika grupy, oczywiście, na n sposobów. Potem możemy do niego dobrać resztę grupy: dowolną liczbę osób spośród pozostałych $n-1$ osób. To możemy zrobić na 2^{n-1} sposobów. Razem na $n \cdot 2^{n-1}$ sposobów. To kończy dowód równości.

W powyższym dowodzie indeks k wyrażał liczebność grupy osób, które wybieramy. Czasami możemy nadać indeksowi k inne znaczenie. Udowodnimy równość

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} \binom{k-1}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Tym razem będziemy wybierać $m+1$ osób spośród $n+1$ osób. Możemy to zrobić na $\binom{n+1}{m+1}$ sposobów i to jest prawa strona wzoru. Aby otrzymać lewą stronę, nadajmy najpierw osobom numery od 1 do $n+1$. Niech k będzie największą liczbą spośród numerów wybranych osób. Jeśli chcemy wybrać $m+1$ osób tak, by najwyższym numerem była liczba k, to, oczywiście, musimy wybrać osobę o tym numerze, a pozostałe osoby (będzie ich m) musimy dobrać spośród osób o numerach od 1 do $k-1$. Możemy to zrobić na $\binom{k-1}{m}$ sposobów. Teraz wystarczy tylko dodać te liczby (dla k od $m+1$ do $n+1$, bo takie tylko mogą być największe numery tych wybranych $m+1$ osób), by otrzymać lewą stronę równości.

Gdy wybieramy $m+1$ osób spośród $n+1$ osób, to indeks k może też oznaczać liczbę numerów mniejszych od największego wybranego numeru; wtedy łatwo otrzymamy równość

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

Tę równość można też otrzymać z poprzedniej przez zamianę wskaźnika sumowania. Nadając indeksowi k inne znaczenia (np. może to być drugi od góry numer), otrzymamy podobne tożsamości. A teraz proponuję zadania:

1. (Zadanie z XLVI OM) Dane są liczby naturalne $n > m > 1$. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ losujemy bez zwracania m liczb. Obliczyć wartość oczekiwaną różnicy między największą a najmniejszą wylosowaną liczbą.

2. Udowodnić tożsamość:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{m} \cdot \binom{k}{m} = \binom{n+1}{2m+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k = 4^n.$$

Wojciech GUZICKI