W zupełnie analogiczny sposób można udowodnić „bliźniaczą” nierówność. Pojawia się ona, na przykład, jako zadanie 241 w „The Otto Dunkel Memorial Problem Book”, *American Mathematical Monthly* 64, no 7, part II, 1957 (istnieje przekład na język rosyjski: „Izbrannyje zadaczi iz żurnała American Mathematical Monthly”, Moskwa 1977). Zachęcam Czytelnika, by naśladując dowód z poprzedniej strony, udowodnił samodzielnie

Twierdzenie 2. *Jeżeli* $x \in (0, \pi)$, *to*

$$C_n(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{n}\cos nx > -1$$

dla $n = 1, 2, \ldots$

Uwaga 1. Jedynie dla $n = 1$ i $x = \pi$ ma miejsce równość $C_1(\pi) = -1$; ponadto

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{0\leq x\leq\pi} C_n(x) = -\ln 2 \approx -0{,}693147\,.$$

Uwaga 2. Czytelnik znający teorię szeregów Fouriera bez trudu sprawdzi, że dla $x \in (0, \pi)$

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots = \frac{\pi - x}{2},$$

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \ldots = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right).$$

Literatura

[1] D. Jackson, „Über eine trigonometrische Summe”, *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo* 32 (1911), 257–262.

[2] T.H. Gronwall, „Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx$”, *Math. Ann.* 72 (1912), 223–243.

[3] E. Landau, „Über eine trigonometrische Ungleichung”, *Math. Zeitschr.* 37 (1933), 36.

Najnowszy 3,5-metrowy teleskop w Apache Point Observatory w Nowym Meksyku ma być dostępny dla wielu astronomów z całego świata bez potrzeby jechania do obserwatorium. W pełni zautomatyzowany teleskop będzie można kontrolować za pomocą sieci komputerowej Internet. Również siecią będą przesyłane wyniki obserwacji.

Po wieloletnich badaniach około 20 tysięcy zdjęć Saturna zrobionych przez Voyagera 2 w 1981 roku M. Gordon i C. Murray z Londynu doszli do wniosku, że Saturn ma o 7 księżyców więcej niż sądzono. Saturn jest więc w tej dziedzinie niewątpliwym rekordzistą z dwudziestoma księżycami. Następna okazja do zbadania okolic Saturna nastąpi w 2004 roku, gdy zbliży się do niego sonda kosmiczna Cassini.

Poszukiwania w zakresie optycznym galaktyki silnie emitującej fale radiowe doprowadziły do odkrycia najbardziej odległej galaktyki. Astronomowie z Wielkiej Brytanii, Holandii i USA za pomocą teleskopu Herschela, znajdującego się na Wyspach Kanaryjskich, odkryli w gwiazdozbiorze Draco galaktykę oznaczoną w katalogu radioźródeł symbolem 8C 1435+635. Galaktyka ta znajduje się w odległości około 8 miliardów lat świetlnych od Ziemi i w momencie, gdy obserwowane przez nas światło opuszczało galaktykę, Wszechświat był 5 razy mniejszy niż obecnie.

kwantowego znane jest pod nazwą notacji Diraca. Okazuje się, że np. elektron w stanie $|L\rangle$ może przejść w stan $|R\rangle$ i na odwrót. Innymi słowy, elektron, którego ruch początkowo był ograniczony do najbliższego otoczenia atomu, nagle może zmienić charakter swojego ruchu i poruszać się w całym krysztale. Powyższy proces nosi nazwę mieszania stanów kwantowych. Zamiast mówić o dwóch rodzajach stanów, wygodnie nieraz jest mówić o dwóch rodzajach elektronów A i B (oczywiście, w rzeczywistości istnieje tylko jeden rodzaj elektronów).

Po przyłożeniu napięcia elektrycznego przez metal zaczyna płynąć prąd, którego wartość przypadająca na jeden elektron j jest dana przez proporcjonalność:

(2) $$j \sim n_A v_A + n_B v_B\,,$$

gdzie v_A i v_B są prędkościami dryfu dla elektronów A i B, a n_A i n_B są ich odpowiednimi względnymi koncentracjami, przy czym $n_A + n_B = 1$.

Ostatnia równość oznacza, że elektron może znajdować się wyłącznie w stanie $|A\rangle$ lub $|B\rangle$. Załóżmy teraz, że elektron przebywa w stanie $|A\rangle$ część α swego czasu, a w stanie $|B\rangle$ część β. Jeśli tak, to powinna zachodzić równość $\alpha + \beta = 1$.

Zauważmy ponadto, że im dłużej elektrony przebywają w stanie $|A\rangle$, tym bardziej wydaje się, że jest ich więcej w tym stanie. Czyli mamy relacje

$$n_A \sim \alpha \quad \text{oraz} \quad n_B \sim \beta\,.$$

Wykorzystując teraz fakt, że wzór (1) jest słuszny dla obu rodzajów elektronów, tzn.

$$\frac{m_A v_A}{\tau_A} = eE = \frac{m_B v_B}{\tau_B}$$

i zakładając, że czas między rozproszeniami jest taki sam ($\tau_A = \tau_B = \tau$), możemy napisać, że prąd

(3) $$j \sim E\tau\left(\frac{\alpha}{m_A} + \frac{\beta}{m_B}\right).$$

Z drugiej strony, zamiast mówić o dwóch rodzajach nośników, równoważnie możemy mieć do czynienia z jednym, który łączy w sobie cechy obu jednocześnie. Takie obiekty noszą nazwę kwazicząstek (efektywne nośniki) i przypisuje się im pewną masę efektywną m^*. Prąd elektryczny dla kwazicząstek opisuje ten sam wzór, co dla „prawdziwych” cząstek, tj.

(4) $$j \sim E\tau^*/m^*\,.$$

Porównując wzory (3) i (4) oraz zakładając znowu, że $\tau^* = \tau$, dostajemy dla masy efektywnej następujące wyrażenie

(5) $$m^* = \frac{m_A m_B}{\alpha m_A + \beta m_B}\,.$$