



Rozwiązanie zadania M 768. Nie. Załóżmy bowiem, że istnieje tylko skończenie wiele liczb pierwszych dających resztę 3 z dzielenia przez 4 i oznaczmy je przez p_1, p_2, \dots, p_n . Łatwo sprawdzić, że liczby $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$ dają z dzielenia przez 4 resztę 1, a zatem $N = p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2 + 2$ daje z dzielenia przez 4 resztę 3. Gdyby wszystkie dzielniki pierwsze liczby N były postaci $4k + 1$, również N musiałaby być takiej postaci. Zatem któraś z liczb p_j jest dzielnikiem N , więc $p_j | N = p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2$. Stąd $p_j | 2$ i wykazana sprzeczność dowodzi, iż nie istnieje największa liczba pierwsza dająca resztę 3 z dzielenia przez 4.



Rozwiązanie zadania M 769. Nie. Załóżmy, że jest przeciwnie. Wprowadźmy na płaszczyźnie układ współrzędnych. Niech P będzie pewnym punktem naszego podzbioru. Dla kąta $\alpha \in [0, \pi]$ przeprowadźmy następującą operację: obróćmy podzbiór w kierunku ruchu wskazówek zegara wokół punktu $(0, 0)$ o kąt α i po obrocie zrzućmy prostopadłe na oś OX . Otrzymamy zbiór będący sumą dwóch rozłącznych przedziałów $(a(\alpha), b(\alpha)) \cup (c(\alpha), d(\alpha))$, gdzie $a(\alpha) < b(\alpha) < c(\alpha) < d(\alpha)$. Dla prostoty zapisu rozważmy przedziały otwarte pozostawiając Czytelnikowi uściślenie rozumowania. Obraz punktu P w tej operacji oznaczmy przez $P(\alpha)$. Łatwo zauważyć, że $b(\alpha), c(\alpha)$ i $P(\alpha)$ są ciągłymi funkcjami kąta α , a ponadto $b(\pi) = -c(0)$, $c(\pi) = -b(0)$, natomiast $P(\pi) = -P(0)$. Zdefiniujmy $\phi : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ przez $\phi(\alpha) = 2P(\alpha) - b(\alpha) - c(\alpha)$. ϕ jest funkcją ciągłą, więc skoro $\phi(0) = -\phi(\pi)$, to istnieje taki kąt $\alpha \in [0, \pi]$, że $\phi(\alpha) = 0$, czyli

$$P(\alpha) = \frac{b(\alpha) + c(\alpha)}{2} \notin (a(\alpha), b(\alpha)) \cup (c(\alpha), d(\alpha)).$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, iż nie istnieje podzbiór płaszczyzny spełniający warunki zadania.



Rozwiązanie zadania M 770. Gdyby istniała taka para, to mielibyśmy

$$5^m + 2 = 17^n,$$

a więc

$$(5^m + 2) \pmod{4} \equiv 17^n \pmod{4},$$

czyli

$$1 + 2 = 1.$$

Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

O eterze mówili już starożytni Grecy, miał to być piąty, najsubtelniejszy z żywiołów, budulec gwiazd. W czasach nowożytnych Kartezjusz wokółsłonecznym wirem eteru tłumaczył ruchy planet. Kiedy doświadczalnie potwierdzono istnienie fal elektromagnetycznych (Hertz, 1888 r.), przewidzianych w ramach elektrodynamiki Maxwella, jednym z najważniejszych pytań stało się zagadnienie ośrodka, w którym te fale się propagują; wszystkie znane wcześniej fale zawsze jakiegoś ośrodka potrzebowały. Naturalnym kandydatem, oczywiście, stał się kosmiczny eter (o eterze jako materialnym podłożu zjawisk świetlnych mówił już Huyghens). Z eterem związane także inercjalny układ odniesienia – to taki, w którym eter spoczywa. Ponieważ eter miał wiele niezwykłych cech (m.in. miał być przezroczysty i nieważki), jego eksperymentalne odkrycie było dla fizyków nie lada wyzwaniem, któremu mogły sprostać jedynie wyrafinowane metody interferometryczne. Fale elektromagnetyczne wyobrażano sobie jako sprężyste odkształcenie eteru. Zgodnie z teorią spoczywającego eteru (Fresnel) ciała ważkie miałyby przenikać przez eter bez żadnego oporu, natomiast zgodnie z teorią unoszonego eteru (Stokes i Hertz) miałyby go ciągnąć za sobą. Wobec ruchów powolnych, takich jak ruchy planet, eter miałby się zachowywać jak lepka ciecz, wobec ruchów szybkich, jakimi są drgania pól – jak ciało sprężyste. Problem doświadczalny sprowadzał się do stwierdzenia, czy wieje wokół nas wiatr eteru.

Elektrodynamika Maxwella była teorią niemechaniczną, jednak interpretowano ją w tym właśnie duchu. Sam Maxwell wyobrażał sobie linie pola jako cieniutkie rurki – wypełnione nieściśliwą cieczą – eterem. Dużą rolę w tworzeniu tego obrazu odegrało formalne podobieństwo wzorów elektrostatyki do opisu bezwirowego ruchu nieściśliwej cieczy. Autorem ciekawej koncepcji budowy materii wykorzystującej eter był nie kto inny jak lord Kelvin. Wyobrażał on sobie atomy jako zawężone wiry eteru, spodziewając się, że klasyfikacja węzłów może odtworzyć układ okresowy pierwiastków Mendelejewa. Cząsteczki chemiczne w myśl tej koncepcji miały być łańcuchami zbudowanymi z takich ogniw – węzłów. Słabością pomysłu Kelvina była stabilność atomów; podróżujące w eterze wiry nie byłyby stabilne.

Tymczasem eksperymenty optyczne obaliły teorię unoszonego eteru i choć niektóre z nich w granicach swej dokładności były niesprzeczne z teorią spoczywającego eteru, to jednak koncepcję eteru odrzucono. Doświadczenie Michelsona–Morleya pokazało, że prędkość światła jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, co wprawdzie dałoby się pogodzić z koncepcją eteru, jednak taka teoria byłaby nieprzejrzysta i najeżona wieloma nowymi trudnościami. Trochę to przypomina historię teorii Ptolemeusza. W miarę jak rosła precyzja obserwacji, rozdzźwięk między modelem a danymi doświadczalnymi stawał się coraz większy. Ptolemeuszowski model układu planetarnego można było ratować rozbudowując go o dodatkowe epicykle, ale byłyby to proces bez końca, a sam model stałby się absurdalny i pozbawiony podstawowego waloru, przestałby cokolwiek tłumaczyć i nie pozwalałby na przewidywania. Podobny los wisi nad poprawioną teorią eteru.

Prostszy i skuteczniejszy w wyjaśnianiu świata okazał się pogląd, że eteru nie ma, fale elektromagnetyczne mogą poruszać się w próżni, natomiast struktura czasu i przestrzeni jest inna, niż ta, którą lansowała fizyka newtonowska. Nowy obraz świata, który narodził się wraz z teorią względności, zaoferował nauce znacznie więcej niż teoria eteru i choć nie pozbawiony paradoksów okazał się bardziej elegancki i prostszy.