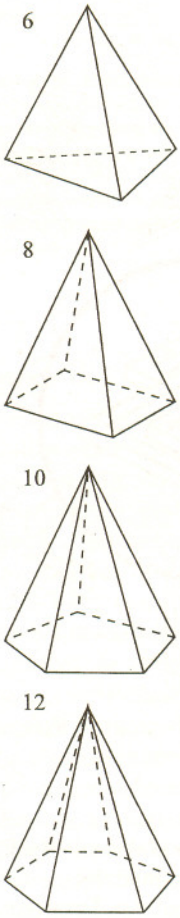
Wielościan o siedmiu krawędziach i jego znajomi

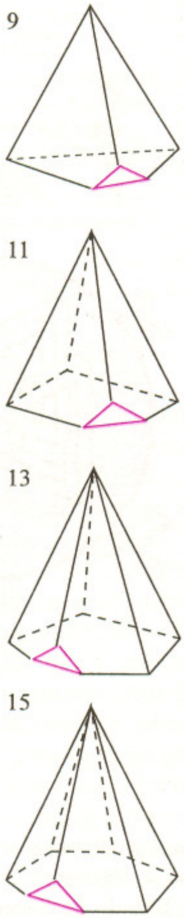
Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ można, oczywiście, narysować wielokąt, który ma n boków. A jak to będzie z wielościanami o zadanej z góry liczbie krawędzi?

Po pierwsze, nie uda się nikomu skonstruować wielościanu o n krawędziach dla n ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wielościan bowiem musi mieć przynajmniej cztery wierzchołki (trzy to jeszcze za mało, bo trzy punkty zawsze leżą w jednej płaszczyźnie), a z każdego wierzchołka wychodzić muszą przynajmniej trzy krawędzie. Ponieważ każda krawędź łączy ze sobą dwa wierzchołki, to krawędzi musi być przynajmniej $(4 \cdot 3) : 2 = 6$. Pięć albo mniej – to jeszcze za mało.

Wielościan o sześciu krawędziach, oczywiście, istnieje: to czworościan. Nietrudno także jest wskazać wielościany o $2k$ krawędziach dla $k = 4, 5, 6, \ldots$. Będą to ostrosłupy o podstawie czworokąta, pięciokąta, sześciokąta, ... (patrz rys. 1).



Rys. 1



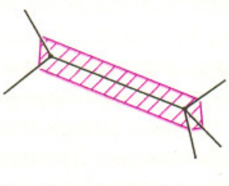
Rys. 2

Skonstruujemy teraz serię wielościanów o nieparzystej liczbie krawędzi równej odpowiednio 9, 11, 13, ... Wystarczy każdemu z ostrosłupów z rysunku 1 tak obciąć rożek przy podstawie, jak pokazuje to rysunek 2. Przybędą wtedy trzy nowe krawędzie (jedna na każdej ścianie przy odcinanym rożku).

Ile by się kto nie męczył, nie uda mu się do katalogu z rysunków 1 i 2 dołożyć wielościanu o siedmiu krawędziach. Gdyby bowiem taki wielościan istniał, to miałby przynajmniej pięć wierzchołków (wielościan o czterech wierzchołkach to czworościan, który ma sześć krawędzi). Z każdego wierzchołka wychodzą przynajmniej 3 krawędzie, każda łączy dwa wierzchołki, więc nasz wielościan miałby krawędzi przynajmniej $(5 \cdot 3) : 2 = 7\frac{1}{2}$. To sprzeczność, która dowodzi, że wielościanu o siedmiu krawędziach nie ma.

Rozumując tak samo można udowodnić, że nie ma wielościanu o nieparzystej liczbie ścian, z których każda jest trójkątem.

Nie ma także wielościanu wypukłego, w którym każda ściana byłaby wielokątem o innej liczbie boków. Gdyby bowiem istniał, to wybralibyśmy ścianę o największej liczbie boków, powiedzmy n. Przylegałoby do niej n innych ścian, każda o innej liczbie boków, nie mniejszej niż 3 i nie większej niż $(n-1)$. Takich ścian może być jednak co najwyżej $(n-3)$, sprzeczność.


Rys. 3. Gdy płaszczyznę cięcia prowadzimy równolegle do ustalonej krawędzi wielościanu i niedaleko od niej, to na przekroju otrzymujemy wielokąt, który ma przynajmniej dwa boki równoległe.

Na koniec udowodnimy, że nie ma wielościanu, którego każdy przekrój byłby trójkątem. Ustalmy dowolną krawędź wielościanu i tak poprowadźmy płaszczyznę przekroju, by była do tej krawędzi równoległa i w dodatku przecinała obie przylegające do niej ściany (rys. 3). Na przekroju powstanie wielokąt o dwóch bokach równoległych – nie będzie to więc trójkąt.

Jeszcze i innych nieistniejących znajomych wielościanu o siedmiu krawędziach można wymyśleć wielu. Polecamy tę pouczającą zabawę.

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI