Kącik olimpijski (17)

Rozwiązanie zadania M779. Załóżmy, że warunki zadania **M 778** spełniają dwie funkcje pseudoharmoniczne f_1 i f_2. Wówczas, co łatwo sprawdzić, funkcja $f = f_1 - f_2$ jest pseudoharmoniczna, przy czym $f(x, y) = 0$ dla dowolnego $(x, y) \in B_N$. Na mocy zadania **M 777** funkcja f przyjmuje zarówno swą największą, jak i najmniejszą wartość na brzegu kraty, a zatem jest tożsamościowo równa zeru. To oznacza, że $f_1 \equiv f_2$, a więc warunki zadania **M 778** spełnia dokładnie jedna funkcja pseudoharmoniczna.

Funkcje pseudoharmoniczne mogą nieznacznie różnić się na brzegu i być identyczne wewnątrz kraty (przykład na rysunku poniżej).

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{ccccc} & -1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 & \end{array}$$

Rozwiązanie zadania F 431. Na skrzydła samolotu działa siła wynikająca ze zderzeń cząsteczek powietrza z ich powierzchnią. Niech θ będzie kątem pomiędzy prostą prostopadłą do powierzchni skrzydła a kierunkiem pionowym. Pionowa składowa tej siły $F_y = F \sin\theta$ jest siłą nośną, musi ona równoważyć ciężar mg samolotu. Pozioma składowa $F_x = F\cos\theta$ jest siłą oporu, którą musi zrównoważyć siła ciągu silników. Siła F standardowo jest równa

$$F = 2\varrho v^2 A \cos^2\theta\,,$$

gdzie v jest prędkością samolotu, A – powierzchnią skrzydeł, ϱ – gęstością powietrza. W przypadku nowoczesnych samolotów siła nośna jest trzykrotnie większa od siły oporu. Wynika stąd, że energia zużyta przez samolot podczas przelotu na odległość L wynosi

$$\frac{1}{3}mgL\,.$$

Przykładowo podajemy dane dotyczące samolotu Lockheed L1011-500 Tri Star, który 19 marca 1995 r. przeleciał na trasie Monachium–Nowy Jork (linia DELTA):

Masa przy starcie	$2{,}19 \cdot 10^5$ kg
Masa przy lądowaniu	$1{,}40 \cdot 10^5$ kg
Średnia masa m	$1{,}79 \cdot 10^5$ kg
Energia uzyskana ze spalonego paliwa	$3{,}64 \cdot 10^{12}$ J
Odległość	$6{,}49 \cdot 10^6$ m
$\frac{1}{3}mgL$	$3{,}8 \cdot 10^{12}$ J

Jak widać, wynik powyższego prostego oszacowania zgadza się bardzo dobrze (przy założeniu 100% sprawności silników) z danymi dotyczącymi przelotu.

Niezmienniki i półniezmienniki (I)

Rozważmy następujące zadanie:

1. *Na stole leży pięć kawałków papieru. Dowolnie wybrany kawałek rozrywamy na cztery części. Proces ten kontynuujemy, tzn. za każdym razem wybieramy jakiś kawałek i rozrywamy go na cztery części. Czy w ten sposób, po pewnej liczbie kroków naszego procesu, możemy uzyskać dokładnie 1996 kawałków papieru?*

Kluczem do rozwiązania tego typu zadań – takich, w których opisany jest pewien proces, jest znalezienie odpowiedniego niezmiennika, tzn. czegoś, co się nie zmienia podczas wykonywania danego procesu. Gdyby na przykład udało nam się wykazać, że w zadaniu 1 parzystość liczby kawałków się nie zmienia, zadanie byłoby rozwiązane – startujemy z pięciu kawałków, nie możemy więc dojść do 1996. Ale niestety, parzystość się zmienia! Liczba kawałków w kolejnych krokach wynosi: 5, 8, 11, 14, 17, ... Nietrudno jednak dostrzec, że po każdym ruchu liczba kawałków wzrasta nam o 3. Mamy więc niezmiennik: reszta z dzielenia liczby kawałków przez 3. Stąd, że liczby 5 i 1996 dają z dzielenia przez 3 różne reszty, odpowiedź na pytanie w powyższym zadaniu jest negatywna.

W niektórych zadaniach sytuacja bywa bardziej skomplikowana – trudno jest znaleźć niezmiennik, łatwiej natomiast tzw. półniezmiennik. Pojęcie to przybliżymy Czytelnikowi posługując się następującym przykładem.

2. *W tablicę o wymiarach* 8×8 *wpisano* 64 *liczby rzeczywiste. W jednym ruchu możemy zmienić znaki wszystkich liczb stojących w pewnej kolumnie lub w pewnym wierszu. Udowodnić, że wykonując tylko takie ruchy można spowodować, aby sumy liczb stojących w każdym wierszu i w każdej kolumnie były nieujemne.*

Wybierzmy wiersz lub kolumnę, w której suma liczb jest ujemna (jeśli jest to niemożliwe – zadanie jest rozwiązane). Zmieńmy wszystkie liczby tam stojące na przeciwne. Jeśli po tym ruchu nie osiągnęliśmy celu, to postępowanie kontynuujemy, tzn. wybieramy wiersz lub kolumnę o ujemnej sumie wyrazów, itd. Zauważmy, że po każdym ruchu suma wszystkich liczb stojących w tablicy wzrasta. Jasne jest, że może ona przybierać jedynie skończenie wiele różnych wartości (nie więcej niż 2^{64}). Zatem proces nasz musi się zakończyć, co rozwiązuje zadanie.

Półniezmiennikiem w naszym rozumowaniu była suma wszystkich liczb tablicy. Wielkość ta co prawda się zmieniała, ale w pewien określony sposób (w tym przypadku w każdym kroku wzrastała) i to już doprowadziło do rozwiązania naszego zadania.

Mamy nadzieję, że powyższe przykłady w miarę trafnie ilustrują użytą metodę. Dla osób pragnących uzyskać biegłość w tego typu zadaniach, proponujemy jeszcze kilka podobnych problemów.

3. Rozważmy sytuację taką, jak w zadaniu 2. Czy niezależnie od konfiguracji początkowej można, używając jedynie powyżej zdefiniowanych ruchów, otrzymać po pewnej liczbie kroków tablicę zawierającą same liczby nieujemne?

4. Na okręgu napisano n liczb naturalnych. Między każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej napisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi n liczbami postępujemy analogicznie. Udowodnić, że po skończonej liczbie takich ruchów wszystkie liczby na okręgu będą równe.

5. Danych jest n kartoników, każdy z jednej strony pomalowany na czerwono a z drugiej na niebiesko. Kartoniki te rozkładamy dowolnie na okręgu. Jeden ruch polega na odwróceniu dowolnych trzech leżących obok siebie kartoników na drugą stronę. Wyznaczyć wszystkie takie wartości n, dla których z dowolnego początkowego układu kolorów da się dojść do każdego innego.

6. Napisano jedna za drugą 1996 liczb: $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/1996$. Spośród nich wybieramy dowolne dwie np.: a i b. Następnie ścieramy je i zamiast nich piszemy liczbę $a + b + ab$. Po 1995 krokach na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Czy jej wartość nie zależy od kolejności ścieranych liczb? (Jeżeli tak, obliczyć ją.)

7. Na tablicy napisano w rzędzie n liczb – każda z nich równa -1 lub 1. W i-tym ruchu możemy zmienić znak r_i stojących obok siebie liczb (nie wszystkie r_i muszą być równe). Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, które należy wykonać, aby niezależnie od konfiguracji początkowej można było (wykonując jedynie powyższe ruchy) dojść do konfiguracji złożonej z samych jedynek?

Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE