

# Helikoida i katenoida

Paweł STRZELECKI

W artykule W. Góździa i R. Hołysta można przeczytać o periodycznych powierzchniach minimalnych. Matematyk chciałby dorzucić do zawartych w nim informacji swoje trzy grosze.

Zacniemy od przypomnienia definicji krzywizny krzywej przestrzennej. Niech  $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  będzie krzywą gładką. **Krzywizna** krzywej  $\mathbf{y}$  w punkcie  $\mathbf{y}(s)$  to odwrotność promienia okręgu, który najlepiej ze wszystkich „udaje” krzywą w otoczeniu punktu  $\mathbf{y}(s)$ . Gdy krzywa jest sparametryzowana długością łuku, tzn. długość wektora stycznego  $|\mathbf{y}'(s)|$  jest dla każdego  $s$  równa 1, to krzywizna jest równa liczbie  $k(s) = |\mathbf{y}''(s)|$ . (Druga pochodna mierzy, jak szybko w pobliżu punktu  $\mathbf{y}(s)$  obraca się wektor styczny do krzywej.) Dla krzywych płaskich wprowadza się krzywiznę ze znakiem (patrz rys. 3 na str. 7).

Gdy  $k(s) \neq 0$ , to prosta przechodząca przez punkt  $\mathbf{y}(s)$  i równoległa do wektora  $\mathbf{y}''(s)$  nazywa się **główną normalną** do krzywej. (Różniczkując zależność  $\mathbf{y}'(s) \cdot \mathbf{y}'(s) = 1$  względem  $s$ , sprawdza się, że istotnie wektor  $\mathbf{y}''(s)$  jest prostopadły do krzywej.) Spośród wszystkich płaszczyzn przechodzących przez punkt  $\mathbf{y}(s)$  najlepiej przylega do krzywej jej **płaszczyzna ściśle styczna**, rozpięta na wektorach  $\mathbf{y}'(s)$  i  $\mathbf{y}''(s)$ .

A jak opisywać zakrzywienie gładkiej powierzchni  $S \subset \mathbf{R}^3$ ? Wyobraźmy sobie, że w ustalonym punkcie  $p \in S$  ktoś wbił słupek prostopadły do  $S$  (czyli prostopadły do płaszczyzny stycznej), my zaś kroimy  $S$ , prowadząc płaskie cięcia wzdłuż owego słupka (czyli wektora normalnego do  $S$ ). Za każdym razem w przekroju otrzymujemy krzywą płaską; jej krzywizna zależy w sposób ciągły od kierunku cięcia  $\theta \in [0, \pi]$ , bo  $S$  jest gładka. Istnieją zatem dwa takie przekroje, że krzywa leżąca na jednym ma krzywiznę najmniejszą, a na drugim – największą z możliwych. Owe ekstremalne krzywizny  $k_1$  i  $k_2$  to tzw. **krzywizny główne**  $S$  w punkcie  $p$ , odpowiednie zaś kierunki cięć – tzw. **kierunki główne**. Prawdziwy jest zaskakujący fakt: jeśli  $k_1 \neq k_2$ , to kierunki główne są prostopadłe. **Krzywizna średnia**  $S$  w  $p$  to połowa sumy krzywizn głównych,  $H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ .

**Uwaga 1.** Gdy przetniemy w  $p$  powierzchnię  $S$  dowolnymi dwiema prostopadłymi płaszczyznami zawierającymi wektor normalny do powierzchni  $S$  w  $p$ , to suma krzywizn dwóch krzywych płaskich otrzymanych w przekrojach będzie równa podwójnej krzywiznie średniej.

Można sprawdzić (po niemiłych rachunkach), że w ogólnym przypadku krzywizna średnia powierzchni  $S$  opisaney równaniem  $z = f(x, y)$  dana jest wzorem

$$(1) \quad H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

(gdzie  $f_x, f_y, f_{xx}, \dots$  oznaczają odpowiednie

pochodne cząstkowe funkcji  $f$ ). Dla kogoś, kto liźnął nieco rachunku całkowego, niedaleka stąd droga do związku między powierzchniami minimalnymi a średnią krzywizną. Mianowicie, pole powierzchni o równaniu  $z = f(x, y)$  jest równe całce podwójnej

$$A(f) = \iint \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

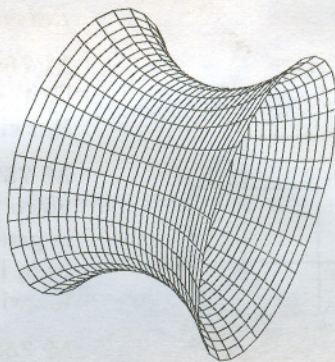
W 1760 roku Lagrange badał problem znalezienia powierzchni  $z = f(x, y)$  o najmniejszym możliwym polu wśród wszystkich powierzchni o zadanych wartościach na brzegu ustalonego otwartego podzbioru płaszczyzny. Jak wykazał Lagrange, funkcja będąca rozwiązaniem powyższego problemu musi spełniać tzw. **równanie Eulera–Lagrange’a dla funkcjonau**  $A(f)$ ,

$$(2) \quad (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Rozwiązania równania (2) Lagrange nazwał powierzchniami minimalnymi. W 1776 roku, w swojej pracy poświęconej krzywiznie powierzchni, Meusnier zauważył, że lewa strona równania (2) to licznik ułamka stojącego po prawej stronie wzoru (1), a zatem powierzchnie minimalne i powierzchnie o znikającej średniej krzywiznie to jedno i to samo.

Poszukując różnych rozwiązań równania (2), Meusnier udowodnił następujące

**Twierdzenie 1.** *Jedyną obrotową powierzchnią minimalną jest katenoida (czyli powierzchnia powstająca przez obrót krzywej łańcuchowej  $y = \frac{1}{a}(\exp(ax) + \exp(-ax))$  wokół prostej  $y = 0$ ; zob. rys. 1).*



Rys. 1. Katenoida.

**Szkic dowodu.** Powierzchnia  $S$  o równaniu  $z = f(x, y)$  ma oś obrotu  $OZ$ , gdy  $f$  zależy tylko od odległości od osi  $OZ$ , czyli od  $x^2 + y^2$ , tzn.  $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$ . Warunek  $H = 0$  jest wówczas równoważny, jak wynika ze wzoru (1), równaniu różniczkowemu zwyczajnemu

$$\frac{dh}{ds} + 2s \left( \frac{dh}{ds} \right)^2 + s \frac{d^2h}{ds^2} = 0,$$

gdzie  $s = x^2 + y^2$ . Zmieniając zmienną niezależną  $s$  na nową, mającą sens geometryczny,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , dostaniemy równanie

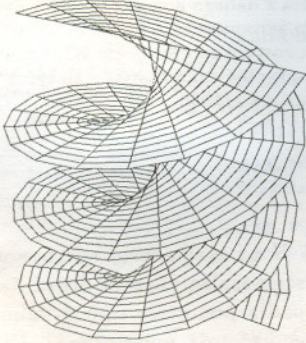
$$h'(r) + (h'(r))^3 + r h''(r) = 0$$

(primy oznaczają pochodne względem  $r$ ).

Stąd, podstawiając  $h' = 1/\psi$ , otrzymujemy po prostym rachunku  $r\psi'(r) = \psi(r) + 1/\psi(r)$ . To już jest równanie o rozdzielonych zmiennych; całkujemy je, wstawiamy  $\psi = 1/h' = dr/dh$  i całkujemy po raz drugi, by ostatecznie otrzymać

$$r(h) = \frac{1}{a}(\exp(ah + b) + \exp(-ah - b)),$$

gdzie  $a, b$  są stałymi. Zatem,  $S$  powstaje przez obrót krzywej łańcuchowej wokół osi  $OZ$ . ■

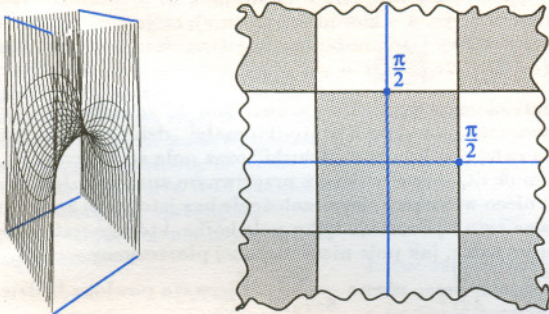


Rys. 2. Helikoida z siatką krzywych asymptotycznych.

Meusnier podał także inny przykład powierzchni minimalnej – helikoidę (patrz rys. 2). Jest to powierzchnia, jaką otrzymamy prowadząc przez każdy punkt linii śrubowej  $\mathbf{y}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  prostą przecinającą oś  $OZ$  pod kątem prostym. Helikoida jest, oczywiście, powierzchnią prostokreślną (przez każdy jej punkt przechodzi leżąca na niej prosta). Dziś wiemy, że zachodzi

**Twierdzenie 2.** *Jedynymi prostokreślnymi powierzchniami minimalnymi są: płaszczyzna i helikoida.*

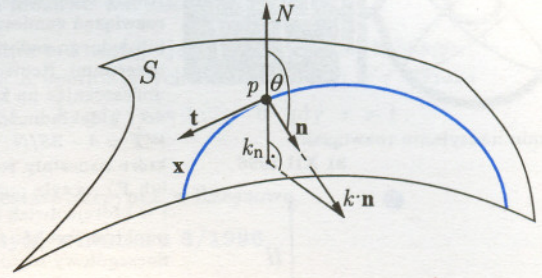
W pół wieku po ukazaniu się pracy Meusniera bezskutecznie próbował to twierdzenie udowodnić Scherk. Znalazł za to kolejny przykład powierzchni minimalnej:  $z = \log(\cos y / \cos x)$ . Można ten przykład „wymyślić” samemu, szukając rozwiązań równania (2) postaci  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ .



Rys. 3. Powierzchnia Scherka  $z = \log(\cos y / \cos x)$  składa się z jednakowych kawalków, które trzeba rozstawić na czarnych polach nieskończonej szachownicy i gładko skleić, dodając w narożach pół pionowe proste.

Pierwszy dowód Twierdzenia 2 podał w 1842 roku Catalan (ten od hipotezy Catalana, stałej Catalana i liczb Catalana; jego nazwisko znane jest Czytelnikom *Delta*). Dla ciekawych podajemy

**Szkic dowodu.** Skorzystamy z pojęcia **krzywizny normalnej** (w punkcie  $p \in S$ ) krzywej  $\mathbf{x}$  leżącej na powierzchni  $S$ . Jest to liczba  $k_n = k \cos \theta$  (patrz rys. 4).



Rys. 4. Między wektorem normalnym do krzywej i wektorem normalnym do  $S$  jest kąt  $\theta$ ;  $k$  oznacza krzywiznę krzywej.

Meusnier pokazał, że krzywizna normalna w punkcie  $p$  zależy **tylko** od wektora stycznego do krzywej  $\mathbf{x}$  w tym punkcie. Krzywe o krzywiznie normalnej równej w każdym punkcie zero (np. proste na powierzchni prostokreślnej) nazywa się **krzywymi asymptotycznymi**.

Zgodnie z Uwagą 1, w otoczeniu każdego punktu powierzchni minimalnej istnieją dwie rodziny,  $\mathcal{F}_1$  i  $\mathcal{F}_2$ , wzajemnie prostopadłych krzywych asymptotycznych.  $\mathcal{F}_1$  to rodzina zawartych w  $S$  prostych. Warunek znikania krzywizny normalnej oznacza, że krzywe rodziny  $\mathcal{F}_2$  (nie mogą to być proste, gdy  $S$  nie jest płaszczyzną) mają płaszczyzny ściśle styczne pokrywające się z płaszczyznami stycznymi do  $S$ . Zatem proste rodziny  $\mathcal{F}_1$  to główne normalne do krzywych rodziny  $\mathcal{F}_2$ . Wynika stąd, że krzywe rodziny  $\mathcal{F}_2$  są **koleżankami w sensie Bertranda** (patrz Uwaga 2 niżej). Ponieważ jest ich nieskończenie wiele, to każda z nich jest linią śrubową, a powierzchnia  $S$  – helikoidą. ■

**Uwaga 2.** Powiemy, że krzywe przestrzenne  $\mathbf{y}$  i  $\mathbf{x}$  (o niezerowej torsji i krzywiznie) są **koleżankami w sensie Bertranda**, gdy proste będące głównymi normalnymi do  $\mathbf{y}$  są jednocześnie głównymi normalnymi do  $\mathbf{x}$ . By dokończyć dowód twierdzenia 2, wystarczy wykazać, że jeśli krzywa  $\mathbf{y}$  ma dwie różne koleżanki w sensie Bertranda, to ma ich nieskończenie wiele; w dodatku jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{y}$  jest linią śrubową.

Na zakończenie powiedzmy tylko, że teoria powierzchni minimalnych jest niezwykle bogatą gałęzią geometrii różniczkowej; stale się w niej bada ciekawe, nietrywialne problemy. Sformułowania twierdzeń tej teorii mocno na ogół przemawiają do wyobraźni i nietrudno je zrozumieć; dowody za to bywają bardzo trudne. Dla wielu matematyków jest to wystarczająca motywacja, by z powierzchni minimalnych uczynić główny przedmiot swych zainteresowań.

Szkic dowodu twierdzenia 2 zaczerpnąłem z książek: Barbosa, Colares, *Minimal surfaces in  $\mathbf{R}^3$*  oraz M.P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*. Tę ostatnią szczerze polecam Czytelnikom chcącym poszerzyć wiedzę z zakresu elementarnej geometrii różniczkowej.