Kącik olimpijski (19)

Jeszcze raz średnia geometryczna i arytmetyczna

Warto pamiętać, że istnieje prosty sposób dowodzenia nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \tag{1}$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

Oznaczmy średnią arytmetyczną liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ przez a i niech $a_k(t) = a_k + t(a - a_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $t \in [0, 1]$. W takim razie $a_k(0) = a_k$ i $a_k(1) = a$. Zwróćmy uwagę, iż dla każdego $t \in [0, 1]$ średnia arytmetyczna liczb $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$ jest równa a, a więc nie zależy od t.

Przez $f(t)$ oznaczmy iloczyn liczb $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$. Korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu n funkcji

$$(f_1 f_2 f_3 \ldots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \ldots f_n + f_1 f_2' f_3 \ldots f_n + \ldots + f_1 f_2 f_3 \ldots f_n'$$

łatwo obliczyć, że:

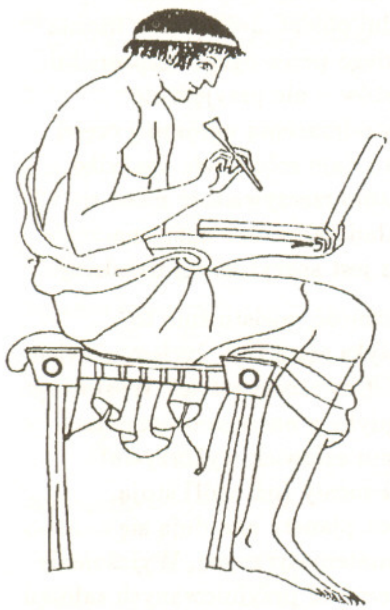
$$f'(t) = a_1(t) a_2(t) \ldots a_n(t) \left[\frac{a - a_1}{a_1(t)} + \frac{a - a_2}{a_2(t)} + \ldots + \frac{a - a_n}{a_n(t)} \right]. \tag{2}$$

Zauważmy, iż jeżeli $a_k \neq a$, to wyrażenie postaci

$$\frac{a - a_k}{a_k(t)} = \frac{a - a_k}{a_k + t(a - a_k)}$$

jest funkcją ściśle malejącą zmiennej t, a ponadto dla $t = 1$ wartość sumy wyrażeń stojących w nawiasie kwadratowym w (2) jest równa zeru. Wnioskujemy stąd, że o ile nie wszystkie spośród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są równe a, to dla każdego $t \in [0, 1)$ jest

$$\frac{a - a_1}{a_1(t)} + \frac{a - a_2}{a_2(t)} + \ldots + \frac{a - a_n}{a_n(t)} > 0$$



i w takim przypadku $f'(t) > 0$. Funkcja $f(t)$ jest więc ściśle rosnąca. Ponadto $f(1) = a^n$, a $f(0) = a_1 a_2 \ldots a_n$. Wynika stąd, iż jeżeli nie wszystkie $\{a_k\}$ są równe a, to średnia geometryczna jest ostro mniejsza od średniej arytmetycznej, a równość we wzorze (1) zachodzi tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$.

Wadą powyższej metody jest konieczność stosowania rachunku pochodnych. Zwykle w szkole najpierw poznajemy nierówność (1), a dopiero dużo później uczymy się pochodnych.

Radzimy Czytelnikowi, aby w podobny sposób udowodnił, że

$$\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \right)^p,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, a p jest ustaloną liczbą rzeczywistą większą od 1.

Grzegorz RZĄDKOWSKI

Rozwiązanie zadania M 789. Dla ciągu liczb $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \{-1, 1\}$ określmy wektor $\mathbf{w}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = e_1 a_1 \mathbf{v}_1 + e_2 a_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + e_n a_n \mathbf{v}_n$. Z nierówności trójkąta wynika, że $|\mathbf{w}(e_1, e_2, \ldots, e_n)| \leq a_1 |\mathbf{v}_1| + a_2 |\mathbf{v}_2| + \ldots + a_n |\mathbf{v}_n| \leq 1$. Zdefiniujmy funkcję $f : \{-1, 1\}^n \to \mathbf{R}$ wzorem $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (\mathbf{w}(e_1, e_2, \ldots, e_n))^2$. Ponieważ zbiór $\{-1, 1\}^n$ ma skończoną liczbę elementów, więc dla pewnego ciągu $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \{-1, 1\}$ funkcja f osiąga maksimum. Zatem $f(E_1, E_2, \ldots, E_n) \geq f(E_1, \ldots, E_{i-1}, -E_i, E_{i+1}, \ldots, E_n)$ dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Stąd

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)^2 - \mathbf{w}(E_1, \ldots, E_{i-1}, -E_i, E_{i+1}, \ldots, E_n)^2 = \\ &= \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)^2 - (\mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n) - 2E_i a_i \mathbf{v}_i)^2 = \\ &= 4E_i a_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n) \rangle - 4E_i^2 a_i^2 |\mathbf{v}_i|^2 \leq \\ &\leq 4a_i |\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n) \rangle| - 4a_i^2, \end{aligned}$$

czyli $|\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n) \rangle| \geq a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Jak stwierdziliśmy wcześniej, $|\mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)| \leq 1$, a zatem prosta mająca ten sam kierunek co wektor $\mathbf{w}(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ spełnia warunki zadania.