od obiektu centralnego. Tak duże masy i rozmiary wskazują na to, iż mamy do czynienia z obiektami młodymi, znajdującymi się w fazie akrecji. Na podstawie różnego typu obserwacji można oszacować, iż w młodych gromadach typu Trapez podobne dyski ma 70–80% gwiazd.

Przykładem dysku zaawansowanego ewolucyjnie jest dysk krążący wokół w pełni już uformowanej, podobnej do Słońca, lecz znacznie od niego młodszej gwiazdy β Pictoris (β Pic). Po raz pierwszy sfotografowano go w 1984 r., niedawno zaś jego nowe zdjęcia o znacznie lepszej rozdzielczości nadesłał teleskop Hubble'a. Całkowita masa dysku β Pic nie przekracza 10^{-3} $M_{\odot}$ (około masy Jowisza lub 300 mas Ziemi). Podobne, mało masywne dyski ma co najmniej 20–30% gwiazd o wieku zbliżonym do β Pic. Tak jak w dysku β Pic, dominuje w nich materia pyłowa; na materię w stanie gazowym przypada jedynie znikomy ułamek masy. Ponieważ czas życia ziaren pyłu jest znacznie krótszy niż wiek dysku typu β Pic, musimy przyjąć, iż są one nieustannie wytwarzane, najprawdopodobniej wskutek zderzeń jakichś większych, licznie występujących w dysku obiektów. Jest to pośredni dowód istnienia planetozymali, a zatem i słuszności hipotez opisujących zaawansowane etapy ewolucji dysków protoplanetarnych. Inną wskazówką przemawiającą za obecnością planetozymali w dyskach typu β Pic są nieregularnie powtarzające się rozbłyski w liniach widmowych niektórych pierwiastków, jakie zaobserwowano w samej β Pic. Jak wynika z obliczeń teoretycznych, takie właśnie rozbłyski towarzyszą zderzeniom planetozymali z gwiazdą centralną. Mamy też powody, by przypuszczać, iż dysk β Pic wszedł już w fazę formowania planet. W swej wewnętrznej części jest on mianowicie wyraźnie wygięty – w taki sposób, jakby podlegał on zakłóceniom grawitacyjnym generowanym przez okrążający gwiazdę centralną obiekt o masie zbliżonej do masy Jowisza.

Fakt, iż starsze dyski są wyraźnie mniej masywne od młodych, jednoznacznie wskazuje na działanie przewidzianych przez teorię procesów prowadzących do utraty masy z dysku. W swej obecnej postaci teoria nie jest jednak w stanie ani przewidzieć tempa utraty masy, ani nawet jednoznacznie wskazać procesów za tę utratę odpowiedzialnych. Zgodnie z obserwacjami etap ewolucji, na którym dochodzi do intensywnej utraty masy, przypada na początek fazy akrecji. Jest to etap niezmiernie ciekawy z teoretycznego punktu widzenia i bardzo ważny z punktu widzenia ewolucji układu planetarnego (bez znaczącej utraty masy z dysku obiekt

Probabilistyka i wybory

W *EPSILONIE* (70) w *Delcie* 1/1997 można przeczytać obszerny tekst Krzysztofa Ciesielskiego o niebezpieczeństwach płynących z nieumiejętnego interpretowania danych statystycznych. Podane przykłady dotyczą m.in. ostatnich wyborów prezydenckich; dorzućmy do nich swoje trzy grosze.

Z drugą turą wspomnianych wyborów wiąże się probabilistyczna ciekawostka. Otóż pewien znany polityk – dla krótkości nazwijmy go X – stwierdził, że nie widzi powodu, by brać udział w drugiej turze wyborów, skoro prawdopodobieństwo, że to właśnie jego głos rozstrzygnie o wyniku, jest równe $1/17\,000\,000$. Co X miał na myśli? Po chwili namysłu stwierdzamy, iż musiał przyjąć, że wyborcy są nierozróżnialni. Dla polityka to bardzo naturalne założenie – w ostatecznym rachunku jest mu bowiem wszystko jedno, czy wygrywa głosami profesorów, urzędników administracji średniego szczebla, czy też np. gospodyń wiejskich i cyklistów. A skoro wyborcy są nierozróżnialni, to drugie równie naturalne założenie mówi, że wszystkie wyniki drugiej tury wyborów mają równe prawdopodobieństwa. Gdy wyborców jest 17 mln (taką mniej więcej liczbę głosujących przewidywano przed drugą turą), to wyników jest $17\,000\,001$. Zatem istotnie, prawdopodobieństwo, że obaj kandydaci otrzymają równe liczby głosów, a wybory będą nierozstrzygnięte (o ile X nie pofatyguje się na spacer do urny), jest przy powyższych założeniach równe $1/17\,000\,000$ z dokładnością do czternastu miejsc po przecinku.

Dla większości z nas założenie o nieodróżnialności wyborców jest jednak dość absurdalne. W końcu nieomal wszystkim żona nie myli się z teściową, a własne dziecko z jego nauczycielką matematyki. Są nawet tacy, którym polityk X nie myli się z politykiem Y (choć nie wiem, czy nadal można tu mówić o *większości*). Przyjmijmy przeto inny model probabilistyczny: każdy z 17 mln wyborców oddaje głos niezależnie od pozostałych, wybierając z prawdopodobieństwem $1/2$ jednego z dwóch kandydatów. Mamy więc do czynienia ze schematem 17 mln prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu (albo, jak będą chcieć niektórzy, porażki) równym $1/2$. Jakie teraz jest prawdopodobieństwo p zdarzenia polegającego na tym, że obaj kandydaci otrzymają równe liczby głosów? Jak wie tzw. każdy młody człowiek,

$$p = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}, \qquad \text{gdzie} \quad n = 17\,000\,000 : 2 = 8\,500\,000\,.$$

No dobrze, ale ILE to właściwie jest? Gdy do przybliżenia silni wykorzystamy przypomniany na str. 2 wzór Stirlinga, to okaże się, że

$$p = 0{,}000193515\ldots \simeq 0{,}0002\,.$$

Wynik jest więc zaskakująco duży (zalecam przepytanie tych znajomych, którzy wiedzą dobrze, co to schemat Bernoulliego; dla mnie było to doświadczenie ciekawe pod względem zarówno rozmaitości uzyskanych odpowiedzi, jak i stopnia ich nietrafności). Gdy nieco skomplikujemy nasz model i przyjmiemy, że liczba wyborców należy do przedziału – powiedzmy – $(16 \cdot 10^6, 18 \cdot 10^6)$ i może być z równym prawdopodobieństwem parzysta lub nieparzysta, to p, oczywiście, zmaleje, ale tylko około dwóch razy. Wynik będzie więc i tak ponad tysiąckrotnie większy od postulowanego przez X-a.

A jak to jest *naprawdę*? Któż to wie... Kłopoty ze stosowaniem rachunku prawdopodobieństwa polegają m.in. na tym, że na takie pytania żaden odpowiedzialny matematyk nie odpowie w wiążący sposób. Jeśli zaś odpowiada, to znaczy, że zamiast matematyką chwilowo zajął się filozofią.

P.S.