Ciągłe wersje zasady szufladkowej Dirichleta

Zasada szufladkowa Dirichleta w najprostszej wersji głosi, że gdy w n szufladach jest przynajmniej $n+1$ przedmiotów, to w pewnej szufladzie są co najmniej dwa przedmioty. Fakt jest oczywisty, a przy tym niezmiernie użyteczny – nie sposób zliczyć, ile razy wkraczający, niby *Deus ex machina*, w rozwiązania różnych problemów.

Zapewne wiele osób uważa zasadę szufladkową Dirichleta za narzędzie, którego zastosowania ograniczają się do matematyki dyskretnej czy wręcz tylko do rozwiązywania zadań olimpijskich układanych ku pognębieniu zarozumiałych geniuszy. Niemniej jednak w wielu rozumowaniach pojawiających się w bardzo różnych działach matematyki, w sytuacjach, gdzie na pierwszy rzut oka ani szuflad, ani przedmiotów nie widać, można się doszukać analogii z zasadą szufladkową Dirichleta. Trzeba tylko odpowiednio elastycznie myśleć o tym, co ma być przedmiotem, a co szufladą, i jak te obiekty liczyć lub raczej *mierzyć*. Oto trzy przykłady, wszystkie dobrze znane.

Przykład 1. Udowodnimy, że gdy pomaluje się ponad połowę powierzchni sfery, to będzie istniała taka średnica, która ma pomalowane oba końce. Gdyby tak nie było, to przy wykonywaniu symetrii środkowej względem środka sfery punkt pomalowany zawsze trafiałby na punkt nie pomalowany. Zatem, symetryczny obraz N zbioru P wszystkich pomalowanych punktów sfery składałby się wyłącznie z punktów nie pomalowanych. Zbiory P i N są więc rozłączne, mają równe pola, i mieszczą się razem na sferze. To jednak nie jest możliwe, gdy pole P przekracza połowę pola powierzchni sfery.

Można też udowodnić (proszę spróbować), że jeśli sferę malowaliśmy $2n$ razy, za każdym razem malując połowę jej powierzchni, to istnieje punkt, który pomalowaliśmy przynajmniej n razy.

Przykład 2. Udowodnimy sławne twierdzenie Poincarégo o powracaniu. Załóżmy, że D jest ograniczonym obszarem przestrzeni euklidesowej, a $T: D \to D$ odwzorowaniem ciągłym, wzajemnie jednoznacznym i zachowującym miarę Lebesgue'a (komu się słowa *miara Lebesgue'a* nie podobają, niech myśli o objętości w przestrzeni trójwymiarowej). Ostatni warunek oznacza, że dla dowolnego $P \subset D$ zbiory P i $T(P)$ mają równe miary. Twierdzenie o powracaniu orzeka, że w dowolnym zbiorze otwartym $U \subset D$ znajdzie się punkt x, który pod działaniem iteracji przekształcenia T powraca do U, to znaczy, dla pewnego n naturalnego mamy $T^n(x) \in U$. A oto dowód. Wszystkie zbiory

$$U, \quad T(U), \quad T(T(U)), \quad \ldots, \quad T^n(U), \quad \ldots$$

są zawarte w D i mają tę samą (dodatnią) miarę. Zatem, nie mogą być parami rozłączne, bo w przeciwnym razie nie pomieściłyby się w ograniczonej szufladzie D. Dla pewnych $k > l$ przecięcie $T^k(U) \cap T^l(U)$ jest więc niepuste, czyli przecięcie $U \cap T^{k-l}(U)$ też jest niepuste. To zaś jest już tylko przeformułowana teza twierdzenia o powracaniu.

Siła powyższego dowodu leży w jego ogólności. Korzysta się w nim jedynie z tego, że przekształcenie T zachowuje pewną miarę (np. objętość), oraz z faktu, że w szufladzie ograniczonej miary nie zmieści się nieskończenie wiele jednakowych przedmiotów o dodatniej mierze.

W mechanice teoretycznej wspomina się zazwyczaj o zaskakujących konsekwencjach twierdzenia Poincarégo. Na przykład, kostka rozpuszczonego w herbacie cukru powinna po pewnym czasie wrócić niemal do wyjściowego stanu.

Wyjaśnienie tego paradoksalnego stwierdzenia leży w tym, że – nawet przy założeniu, iż mechanika klasyczna dokładnie opisuje zachowanie wielkiej liczby cząstek wodnego roztworu sacharozy – wspomniany *pewien czas* jest dłuższy od czasu istnienia Wszechświata. Z punktu widzenia zaś mechaniki statystycznej jest to jedynie wartość oczekiwana czasu, który powinien upłynąć, by przynajmniej raz zaszło znikomo prawdopodobne zdarzenie losowe polegające na zestaleniu się rozpuszczonej kostki cukru.

Przykład 3. Liczby z odcinka $[0,1]$ wrzucamy do różnych szuflad w ten sposób, by do tej samej szuflady wpadały wszystkie pary liczb, których różnica jest liczbą wymierną (proszę się zastanowić, dlaczego to poprawny przepis). Następnie tworzymy zbiór Z, który zawiera dokładnie jedną liczbę z każdej szuflady.

Ustawmy teraz wszystkie liczby wymierne z przedziału $[-1,1]$ w ciąg $w_1, w_2, w_3, \ldots$ Obrazy $Z_1, Z_2\ Z_3, \ldots$ zbioru Z w przesunięciach o wektory $w_1, w_2, w_3, \ldots$ są rozłączne – w przeciwnym przypadku znaleźlibyśmy dwa elementy Z o wymiernej różnicy, wbrew założeniu, że elementy zbioru Z pochodzą z różnych szuflad. Suma S wszystkich zbiorów Z_i mieści się, oczywiście, cała w przedziale $[-1,2]$. Ponieważ wszystkie poprzesuwane kopie Z_i zbioru Z mają taką samą długość, jak Z, a jest ich nieskończenie wiele, oznacza to, że zbiór Z powinien mieć długość (ściślej, *miarę Lebesgue'a*) równą zeru. Skoro tak, to zbiór S powinien także mieć zerową długość: $|S| = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3| + \cdots = 0$.

Z drugiej strony, suma rozłącznych, poprzesuwanych kopii zbioru Z zawiera cały przedział $[0,1]$ (bo każdą liczbę z tego przedziału wrzuciliśmy do którejś szuflady). Zatem długość zbioru S powinna być nie mniejsza od 1.

Skąd sprzeczność? Z prostego powodu: nie każdemu podzbiorowi odcinka można w rozsądny sposób przypisać liczbę, która będzie jego długością (miarą Lebesgue'a). Mówiąc inaczej, nie każdy podzbiór odcinka $[0,1]$ jest *mierzalny*.

P.S.