Fourier, falki i FBI

W 1822 roku Jean Baptiste Joseph Fourier w swojej *Analitycznej teorii ciepła* pisał, że choć równanie przewodnictwa cieplnego ma szczególnie prostą postać, to jednak *...znane metody nie dostarczają żadnego ogólnego sposobu jego całkowania; nie możemy zatem wnioskować o wartości temperatury po upływie określonego czasu. Jednakże liczbowa interpretacja jest niezbędna (...) – jak długo jej nie mamy, możemy mówić o niepełności i bezużyteczności rozwiązań.*

Najważniejszy zapewne w życiu Fouriera pomysł polegał na tym, by rozwiązania jednowymiarowego równania dyfuzji, opisującego np. rozchodzenie się ciepła w metalowym pręcie, szukać w postaci szeregu

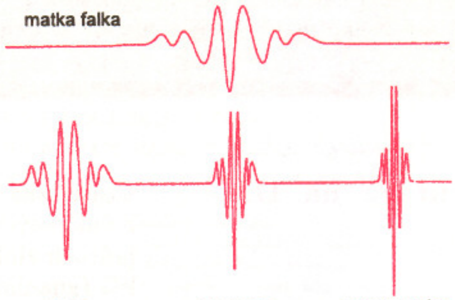
$$a_0(t) + \sum_n \Big(a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx \Big).$$

Pomysł ten prowadzi do ogólnej metody całkowania równania dyfuzji, m.in. dzięki temu, że każda w miarę porządna funkcja okresowa (a co za tym idzie, każdy początkowy rozkład temperatury wzdłuż pręta) daje się przedstawić w postaci sumy odpowiedniego szeregu sinusów i cosinusów – takiego, jak wyżej, tylko o współczynnikach niezależnych od czasu t. Szeregi tej postaci nazywamy szeregami Fouriera; przydają się one nie tylko do rozwiązywania jednowymiarowego równania dyfuzji, ale także do bardzo wielu innych rzeczy.

W przestrzeni $L^2(-\pi, \pi)$ funkcji całkowalnych z kwadratem na odcinku $(-\pi, \pi)$ wyposażonej w iloczyn skalarny $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ funkcje $\sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i $\cos nx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ stanowią bazę złożoną z wektorów parami prostopadłych, zupełnie tak, jak wektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Współczynniki szeregu Fouriera funkcji f można więc uważać za współrzędne wektora f w pewnej bazie. Znajduje się je tak, jak w geometrii euklidesowej – obliczając iloczyny skalarne f i wektorów bazy. To bardzo użyteczna analogia.

Niestety, lokalne własności funkcji przenoszą się na globalne własności jej szeregu Fouriera. Na przykład, nieciągłość funkcji powoduje, że jej szereg Fouriera musi zawierać nieskończenie wiele składników; wnioskowanie w drugą stronę jest na ogół zadaniem bardzo trudnym, a o dokładnym umiejscowieniu owej nieciągłości nie ma co marzyć. Dlatego, gdy kodujemy w postaci szeregu Fouriera zapis nagrania godzinnego koncertu, to zaburzenie nagrywania w ostatnich trzech minutach wpłynie na *cały* szereg Fouriera. Mówiąc inaczej, szereg Fouriera sygnału dźwiękowego zawiera wprawdzie pełną informację o częstościach dźwięków składających się na ów sygnał, ale jest to informacja starannie ukrywająca zależność częstości całego sygnału od czasu.

Swoistym panaceum pozwalającym nie tylko zakodować zawiły sygnał w postaci sumy wielu sygnałów prostszych, ale przy okazji odnaleźć ów utracony w przypadku szeregów Fouriera czas, są tak zwane falki (po angielsku *wavelets*). Funkcję ψ nazywa się falką (czasem matką–falką), jeśli uzyskane z niej przez skalowanie i przesunięcie funkcje $\psi(2^n x + k)$, gdzie n i k są całkowite, stanowią bazę przestrzeni L^2. Jak udowodniła Ingrid Daubechies w 1987 roku, istnieją matki–falki znikające poza pewnym przedziałem domkniętym (patrz rysunek).



Uzyskane z nich córki, wnuczki, prawnuczki itd. mają wąziutkie nośniki i strome wykresy. Dzięki temu „falkowy” szereg funkcji nieporównanie lepiej od szeregu Fouriera odzwierciedla np. jej nieciągłość czy gwałtowną zmianę wartości na małym przedziale. Różne sygnały z pomocą falek można kodować, kompresować i czyścić z niepotrzebnych szumów dużo oszczędniej – wystarczy brać dużo mniej wyrazów odpowiedniego szeregu. W dodatku, gdy kodujemy np. zdjęcie, to matki–falki odpowiadają tylko za ogólny zarys widocznego obiektu, a wnuczki czy prawnuczki – za drobne detale. Jeśli nie interesują nas pojedyncze włosy sfotografowanej osoby, to wystarczy zapomnieć o falkach dalekich generacji. Większe charakterystyczne cechy obrazu nie ulegną przez to zniekształceniom. Za to w przypadku kodowania obrazu w postaci szeregu Fouriera podobny zabieg mógłby mieć zgubne konsekwencje.

Dzięki tym zaletom falki mogą się pochwalić spektakularnymi zastosowaniami. Jest wśród nich m.in. stworzenie przez FBI wielkiej komputerowej bazy danych z odciskami palców (przedtem 200 milionów kompletów odcisków przechowywano w tej instytucji po prostu na kartonowych fiszkach) albo oczyszczenie z szumów starych, bezużytecznych wcześniej z punktu widzenia muzykologów, nagrań Brahmsa wykonującego własne utwory – dzięki falkom wiadomo przynajmniej, co grał artysta. Falki stosuje się też do wykrywania łodzi podwodnych wśród licznych szumów tła morskiego, do badania prądów oceanicznych i opisu wielkoskalowego rozkładu materii we Wszechświecie.

Długa lista zastosowań falek, wyrosłych spośród abstrakcji analizy funkcjonalnej, może być istotnym powodem rewizji poglądów dla osób sądzących, że rację bytu mają tylko badania naukowe o wyraźnym praktycznym celu.

P.S.