Wzór Fermata

Carroll najwyraźniej nie wiedział o spostrzeżeniu Fermata poczynionym w [4]: jeśli z jest przeciwprostokątną, a b i d przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego o bokach wymiernych, to można otrzymać nowy trójkąt prostokątny o wymiernych bokach i tym samym polu, kładąc

$$z' = \frac{z^4 + 4b^2d^2}{2z(b^2 - d^2)}, \quad b' = \frac{z^4 - 4b^2d^2}{2z(b^2 - d^2)}, \quad d' = \frac{4z^2bd}{2z(b^2 - d^2)}.$$

Iterując powyższy wzór $n-1$ razy, otrzymamy n trójkątów prostokątnych o równych polach i bokach długości wymiernej. Pomnożenie wszystkich boków przez odpowiednią liczbę całkowitą zmieni długości boków w liczby całkowite i, oczywiście, nie naruszy warunku równości pól. Nie mamy jednak pewności, czy niektóre z otrzymanych trójkątów nie będą przystające. Zakończmy więc niniejszy artykuł zadaniem dla Czytelników.

Zadanie. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ istnieje nieskończona rodzina (pierwotnych) n-tek trójkątów pitagorejskich o równych polach.

Z angielskiego przełożył P.S.

Literatura

[1] J. Collins, *The Gentleman's Math. Companion*, 2, No. 11 (1808), 123.

[2] J. Cunliffe, *New Series of the Math. Repository* (ed. Th. Leybourn), 3, II (1814), 60.

[3] C.S. Dodgson, *Life and Letters of Lewis Carroll*, New York Century, 1898.

[4] P. Fermat, *Œuvres III*, 254–255; Fermat's Diophanti Alex. Arith., 1670, 220.

[5] M. Hazewinkel, *Encyclopaedia of mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (etc.), 1987.

[6] N. Hungerbühler, *Math. Mag.* 69/3, 182-184 (1996).

[7] L. J. Mordell, *Diophantine equations*, Academic Press, London (etc.), 1970.

[8] C. Tweedie, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 24 (1905-6), 7–19.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

Rozważamy funkcje o wartościach rzeczywistych określone na zbiorze $\{-1,1\}^n$, na który można patrzeć jako na zbiór wierzchołków n-wymiarowej kostki $[-1,1]^n$. Dla każdego podzbioru A zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ funkcję $w_A : \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ definiujemy wzorem $w_A(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \prod_{i\in A} x_i$. Przyjmujemy, że $w_\emptyset \equiv 1$.

Funkcje w_A tworzą tzw. układ Walsha.

M 832. Udowodnić, że dla $A, B \subset \{1,2,\ldots,n\}$ zachodzi tożsamość $w_A \cdot w_B = w_{A\div B}$, gdzie $A \div B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów A i B.
Rozwiązanie na str. 16

M 833. Udowodnić, że dla każdej funkcji $f\colon \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ można dobrać takie liczby rzeczywiste a_A, że $f = \sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}} a_A w_A$.
Rozwiązanie na str. 15

M 834. Dla $f\colon \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ zdefiniujmy funkcję $Lf\colon \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ wzorem

$$Lf(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n}\Big(f(-x_1,x_2,\ldots,x_n) + {} + f(x_1,-x_2,x_3,\ldots,x_n) + \cdots + f(x_1,\ldots,x_{n-1},-x_n)\Big)$$

(tzn. funkcję Lf otrzymujemy, uśredniając wartości f w sąsiednich wierzchołkach kostki). Udowodnić, że $Lw_A = (1 - \frac{2}{n}\operatorname{card} A)w_A$, gdzie $\operatorname{card} A$ oznacza liczbę elementów zbioru A.
Rozwiązanie na str. 16

Uwaga. Powyższe wyniki można wykorzystać do wykazania ergodyczności symetrycznego błądzenia losowego po wierzchołkach n-wymiarowej kostki (do sąsiednich wierzchołków przechodzimy z prawdopodobieństwem $1/n$).

Redaguje Jarosław KULPA

F 467. Od lat fizycy zastanawiają się, czy neutrino ma masę spoczynkową. Oszacować, jaką teoretycznie największą masę może mieć neutrino i wyrazić tę masę w elektronowoltach.
Przyjąć, że liczba neutrin we Wszechświecie jest porównywalna z liczbą fotonów promieniowania reliktowego mających widmo ciała doskonale czarnego o temperaturze $T = 2{,}74$ K. Koncentracja fotonów wynosi $n = a\left(\frac{kT}{hc}\right)^3$, gdzie $a = 60{,}4$ jest współczynnikiem liczbowym, k – stałą Boltzmanna, natomiast h – stałą Plancka. Przyjąć, że gęstość Wszechświata jest równa w przybliżeniu gęstości krytycznej $\rho_{\mathrm{kr}} = 5{,}5\cdot 10^{-27}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, masa zaś obserwowalnej jasnej materii jest dziesięciokrotnie mniejsza.
Rozwiązanie na str. 6

F 468. Kiedy w momencie gaszenia światła otwieramy oczy, widzimy przez chwilę proces stygnięcia włókna żarówki. Oszacować czas tego procesu, gdy temperatura włókna spada od $T_1 = 2800$ K do $T_2 = 1000$ K, tj. do granicy odbierania wrażeń wzrokowych. Dane dotyczące żarówki i włókna: moc żarówki $P = 100$ W, promień przekroju włókna $r = 1\cdot 10^{-4}$ m, gęstość wolframu $\rho = 19\,300\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, masa molowa wolframu $\mu = 184\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, emisyjność wolframu w porównaniu z ciałem doskonale czarnym $k = 40\%$.
Prawo Stefana-Boltzmanna mówi, że moc promieniowania jednostkowej powierzchni ciała doskonale czarnego wynosi $\sigma\cdot T^4$, gdzie $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$ jest stałą Stefana-Boltzmanna. Ciepło molowe ciał stałych w wysokich temperaturach wynosi $C = 3$ R, gdzie $\mathrm{R} = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}mol^{-1}}$ jest stałą gazową.
Rozwiązanie na str. 6