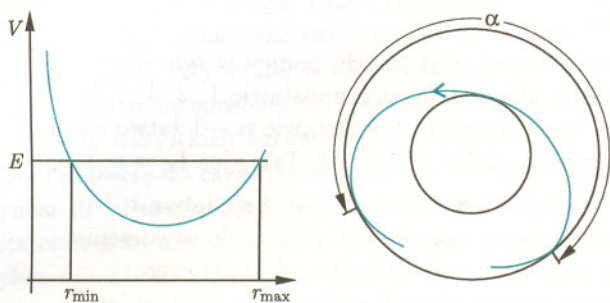


Załóżmy, że wykres efektywnego potencjału ma kształt pokazany na rysunku 9. Równanie (8) może zachodzić tylko dla  $V(r) < E$ , czyli w pierścieniu  $r_{\min} \leq |\vec{x}| \leq r_{\max}$ . Ten pierścień pełni rolę prostokąta z teorii figur Lissajous.



Rys. 9.

Gdy w (8) mamy znak + i  $r$  rośnie, to rośnie także i  $\varphi$ . W pewnym momencie  $r$  osiąga wartość maksymalną (apocentrum). Następuje zmiana znaku w pierwiastku,  $r$  zaś zaczyna maleć. Potem  $r$  osiąga perycentrum  $r_{\min}$ , znowu zaczyna rosnąć i sytuacja powtarza się.

Nietrudno tu dostrzec obroty, np. kolejne powroty na okrąg apocentryczny. Jeśli kąt  $\alpha$  z rysunku 9 jest niewspółmierny z  $\pi$ , to trajektoria dowolnego punktu jest gęsta w pierścieniu, a w przeciwnym przypadku jest krzywą zamkniętą. Można tutaj też znaleźć torus  $T^2 \subset \mathbb{R}^4$  z obmotką, której rzut jest naszą trajektorią.

Jako ciekawostkę przytoczę przekształcenie (znajdzone przez K. Bolina), które zamienia układ wahadła sferycznego w układ Keplera: jeśli zespolona funkcja  $z = z(t) = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$  spełnia równanie Hooke'a  $\ddot{z} = -z$ , to zmienna  $Z = z^2$  z nowym czasem  $\tau$ , dla którego moment pędu pozostaje stały, spełnia równanie powszechnego ciężenia  $d^2Z/d\tau^2 = -cZ/|Z|^3$ . Otrzymuje się stąd okresowość orbit keplerowskich, a nawet więcej, można wykazać, że gdy zmienna  $z(t)$  zakreśla elipsę o środku w 0, to  $Z(\tau) = z^2(t)$  zakreśla elipsę z ogniskiem w 0 (pierwsze prawo Keplera). Zainteresowanym polecam książkę V.I. Arnolda *Huygens i Barrow, Newton i Hooke* (po rosyjsku).

Przykłady, których nie udało się nam omówić, to m.in. geodezyjne na powierzchni obrotowej i na elipsoidzie trójosiowej, oraz ogólne całkwalne układy hamiltonowskie. Okazuje się, że jeśli układ jest całkwalny, to przestrzeń jego możliwych położzeń rozbija się na torusy, na których trajektorie tworzą obmotki (twierdzenie Liouville'a–Arnolda).



## Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

**M 838.** Dany jest taki trójkąt  $ABC$ , że  $|AB| = |BC|$  oraz  $\angle BAC = 80^\circ$ . Punkt  $T$  należy do odcinka  $BC$  i  $|BT| = |AC|$ . Znaleźć kąt  $TAC$ .

Rozwiązanie na str. 12

**M 839.** Niech  $n, m, k$  będą liczbami naturalnymi,  $m > n$ . Która liczba jest większa:

$$\sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n + \dots}}} \quad \text{czy} \quad \sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m + \dots}}}$$

W każdym z powyższych wyrażeń jest  $k$  pierwiastków kwadratowych, a  $n$  i  $m$  występują na przemian.

Rozwiązanie na str. 3

**M 840.** Wyznaczyć taki najmniejszy przedział  $A$  liczb rzeczywistych, że dla każdego  $a \in A$  istnieją  $b, c \in A$ , spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + b + c = 15, \\ ab + ac + bc = 72. \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 2

Przygotowali Eryk i Wojciech KOPCZYŃSCY

Poniższe zadania łatwo jest rozwiązać stosując rachunek całkowity. Zachęcamy do rozwiązania ich bez stosowania rachunku całkowitego.

**F 471.** Obliczyć energię potencjalną samooddziaływania grawitacyjnego jednorodnej kuli o masie  $M$  i promieniu  $R$ .

Rozwiązanie na str. 13

**F 472.** Obliczyć moment bezwładności jednorodnego stożka o masie  $M$  i promieniu podstawy  $R$  względem osi symetrii.

Rozwiązanie na str. 13

