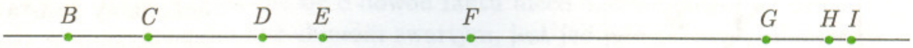
Mieszkanie dla Alicji

Alicja chce zamieszkać przy tej samej ulicy, przy której w różnych domach (położonych tak, jak pokazuje to rys. 1) mieszka już ośmioro jej przyjaciół: Basia, Cesia, Dorota, Edek, Felek, Grześ, Hania i Irka. Gdzie powinna zamieszkać, żeby suma odległości od jej mieszkania do mieszkań ośmiorga przyjaciół była najmniejsza z możliwych?



Rys. 1

Suma odległości z domu Alicji do domów Basi i Irki zawsze jest przynajmniej taka, jak długość odcinka BI. Jeśli punkt A, w którym mieszka Alicja, leży na odcinku BI, to wówczas mamy $AB + AI = BI$. Podobnie, suma odległości $AC + AH$ jest – dla dowolnego punktu A – przynajmniej taka, jak odległość CH. Przy tym, $AC + AH = CH$ dla każdego punktu A leżącego na odcinku CH. Zatem, suma czterech odległości $AB + AC + AH + AI$ jest minimalna, jeśli punkt A wybierzemy (w dowolny sposób!) na odcinku CH.

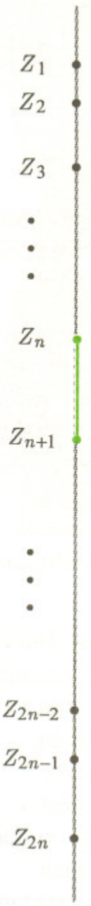
Suma kolejnych dwóch składników, $AD + AG$, jest najmniejsza i równa DG, gdy punkt A leży między D i G. Wreszcie, suma odległości z domu Alicji do domów Edka i Felka jest najmniejsza (i równa EF), gdy Alicja mieszka w jakimkolwiek punkcie odcinka EF łączącego domy Edka i Felka.

Zatem, suma odległości z domu Alicji do domów ośmiorga przyjaciół jest najmniejsza (i równa $BI + CH + DG + EF$), gdy Alicja mieszka w domu stojącym gdziekolwiek na odcinku EF.

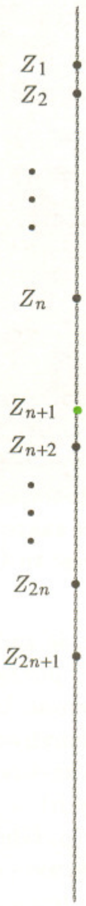
Jeśli Alicja ma nie ośmioro, ale $2n$ znajomych $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2n}$ mieszkających w różnych miejscach (patrz rys. 2), to – jeśli chce, by suma odległości z jej domu do domów wszystkich znajomych była najmniejsza z możliwych – powinna zamieszkać w dowolnym punkcie odcinka Z_nZ_{n+1}. Dowód jest taki sam, jak wyżej, dla $n = 4$.

Jeśli natomiast liczba znajomych Alicji jest równa $2n + 1$ (rys. 3), to środkowy składnik rozpatrywanej sumy $2n + 1$ liczb, AZ_{n+1}, zostaje bez pary. Jest on zawsze nieujemny, a znika wtedy i tylko wtedy, gdy $A = Z_{n+1}$. Alicja powinna wówczas zamieszkać w punkcie Z_{n+1}. Warto zauważyć, że nie są ważne odległości punktu Z_{n+1} od pozostałych punktów Z_i. Punkty $Z_1, \ldots, Z_n$ można dowolnie doń zbliżyć, a punkty $Z_{n+2}, \ldots, Z_{2n+1}$ dowolnie odeń oddalić; jeśli tylko zachowamy przy tym kolejność punktów Z_i na prostej, to suma $AZ_1 + \cdots + AZ_{2n+1}$ nadal będzie najmniejsza właśnie dla $A = Z_{n+1}$ (rys. 4).

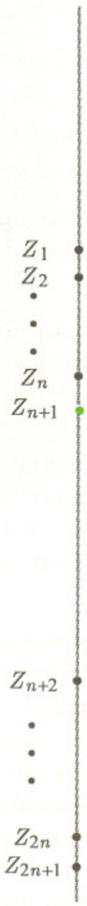
Wbrew pozorom, nie jest to wcale fakt szczególnie zaskakujący. Gdy bowiem mieszkamy już wygodnie w samym śródmieściu, to znajomi, którzy z dalekich przedmieść wyprowadzą się na jeszcze dalsze, nie namówią nas przecież łatwo do zmiany miejsca zamieszkania.



Rys. 2



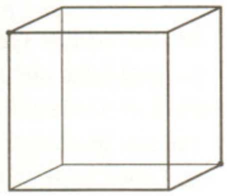
Rys. 3



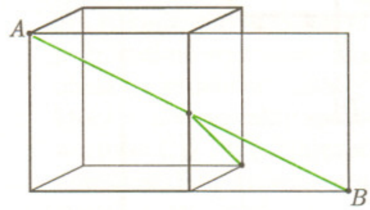
Rys. 4

Nieskracalna droga

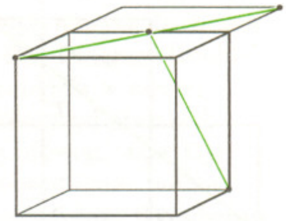
Mucha, wędrując po jednostkowym sześcianie od pewnego jego wierzchołka do wierzchołka przeciwległego (rys. 1), musi przejść po jego powierzchni drogę o długości co najmniej $\sqrt{5}$. Przekonuje nas o tym eksperyment myślowy polegający na otworzeniu sześcianu (rys. 2). Gdyby istniała krótsza droga, to istniałaby na płaszczyźnie droga łącząca A i B, krótsza od odcinka AB, co jest niemożliwe.



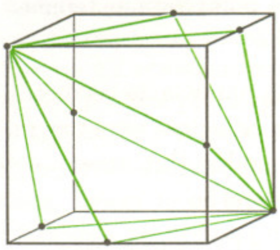
Rys. 1



Rys. 2



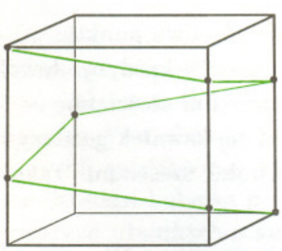
Rys. 3



Rys. 4

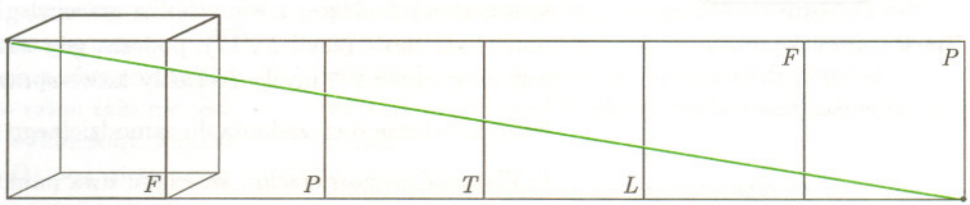
Takie rozumowanie trzeba uzupełnić. Naprawdę bowiem stwierdziliśmy jedynie, że nie ma krótszej drogi prowadzącej przez przednią i prawą ścianę. A można przecież iść inaczej. Bez trudu stwierdzamy, że idąc ścianą górną i tylną (rys. 3) też możemy dotrzeć do przeciwległego wierzchołka sześcianu po drodze długości $\sqrt{5}$. Chwila namysłu i już wiemy, że dróg tej długości jest 6 – przez środki każdej z krawędzi łączących dwie ściany zawierające start i metę (rys. 4). Jest ich faktycznie 6, bo i ze startu, i z mety wychodzą po 3 krawędzie (i te musimy odrzucić), a wszystkich krawędzi w sześcianie jest 12.

I teraz jest już bardzo blisko do końca uzasadnienia, że znaleziona droga jest najkrótsza: żeby dojść od startu do mety, trzeba przejść po jakiejś ścianie zawierającej start i jakiejś zawierającej metę, czyli po co najmniej dwóch ścianach, a te przypadki już rozpatrzyliśmy.



Rys. 5

Żeby pokazać, jak bardzo druga część dowodu była potrzebna, rozważmy drogę, która kolejne pionowe krawędzie przecina w odległości równej kolejno: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ od górnego denka (rys. 5). Jak widać z rysunku 6, i ta droga jest nieskracalna. Wyobraźmy sobie trasę łączącą start z metą jako bardzo sprężystą gumkę – jej (choćby największa) sprężystość nie przeprowadzi gumki w położenie z rysunku 2: do tego celu trzeba by najpierw gumkę dodatkowo rozciągnąć.



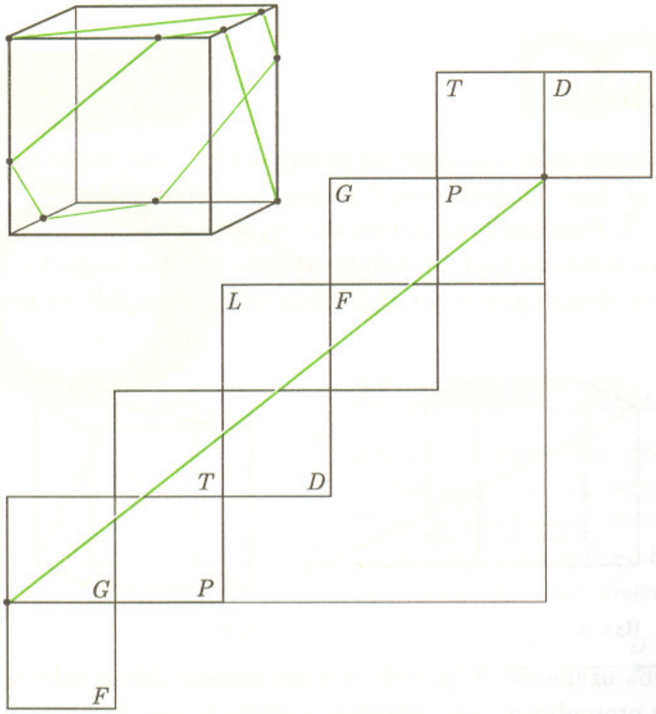
Rys. 6

Na rysunkach 6 i 7 stosujemy następujący sposób oznaczania ścian sześcianu:
F oznacza front, T – tył,
P – prawa, L – lewa,
G – góra, D – dół.

W tym miejscu widać już, że linii nieskracalnych łączących przeciwległe wierzchołki sześcianu jest nieskończenie wiele. Co więcej, mogą one mieć dowolnie wielką długość. Wzór

$$\sqrt{4(2n+1)^2+1}$$

opisuje długość linii nieskracalnej owijającej sześcian n razy w podobny sposób, jak na rysunku 5 linia owija go raz.



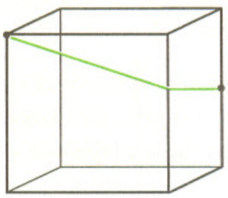
Rys. 7

A czy są linie nieskracalne łączące przeciwległe wierzchołki sześcianu i mające inną długość ? Rysunek 7 pokazuje przykład takiej linii na sześcianie i na jego rozwinięciu. Z tego ostatniego można bez trudu obliczyć, że ma ona długość $\sqrt{41}$, a więc inną od określonych podanym poprzednio wzorem.

Powstaje więc pytanie, ile jest linii nieskracalnych, przy czym chodzi o jakąś bardziej precyzyjną odpowiedź niż „nieskończenie wiele" (bo to już wiemy).

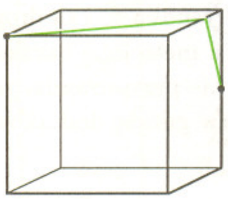
Dobrze jest w tym miejscu zacząć stosować takie nazwy, jakie się powszechnie w matematyce stosuje. Otóż linie nieskracalne nazywa się *liniami geodezyjnymi.* Nazwa ta bierze się stąd, że nawet najprostsze z linii wyznaczanych na powierzchni Ziemi przez geodetów (np. linia kolejowa Małkinia – Białystok) nie są liniami prostymi (ze względu na pofałdowanie terenu), a właśnie nieskracalnymi.

Bernhard Riemann zaproponował półtora wieku temu uprawianie geometrii w ten sposób, by geodezyjne traktować jako proste, a odległość punktów mierzyć długością najkrótszej z geodezyjnych łączących dwa punkty (lub kresem dolnym długości takich geodezyjnych, gdy najkrótsza nie istnieje).



Rys. 8

Ważną własnością powierzchni regularnych (mniejsza o to, co to znaczy – praktycznie każda powierzchnia, z którą mamy do czynienia, jest regularna, w tym sześcian) jest twierdzenie:
przez każdy punkt powierzchni w każdym stycznym kierunku przechodzi geodezyjna.
Nie oznacza to jednak, że każda geodezyjna łączy wybrane dwa punkty. Odpowiedź na postawione wyżej pytanie jest następująca: W każdym, dowolnie małym (ale nie zerowym) kącie narysowanym na powierzchni sześcianu i mającym wierzchołek w wierzchołku sześcianu mieści się kawałek geodezyjnej wychodzącej z tego i trafiającej w przeciwległy wierzchołek sześcianu. Taka własność nazywa się gęstością.

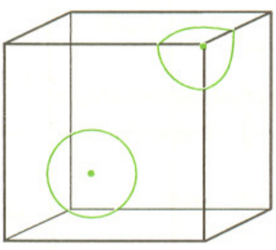


Rys. 9

Nie zawsze jest łatwo zgadnąć, która geodezyjna jest najkrótsza. W przypadku, gdy chodzi o odległość (riemannowską) wierzchołka sześcianu od środka którejś krawędzi wychodzącej z wierzchołka przeciwległego, wielu wskazuje na długość linii z rysunku 8 (czyli $\frac{1}{2}\sqrt{17}$), podczas gdy właściwe rozwiązanie (równe $\frac{1}{2}\sqrt{13}$) jest na rysunku 9 – myślę, że każdy łatwo sprawdzi te wyniki.

Na zakończenie dwa zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Wskazać na powierzchni sześcianu dwa punkty A i B, dla których istnieje tylko jedna łącząca je linia realizująca ich riemannowską odległość (to dla rozgrzewki). Dla dowolnego punktu A wskazać wszystkie punkty B o powyższej własności.



Rys. 10

2. Na rysunku 10 pokazane są dwa riemannowskie okręgi o tym samym promieniu r; sprawdzić, że długość jednego z nich jest równa przyzwoicie $2\pi r$, drugiego natomiast $\frac{3}{2}\pi r$. Czy w riemannowskiej geometrii powierzchni sześcianu są okręgi o tym samym promieniu, a jeszcze innej długości ?

Małą Deltę przygotowali: Paweł STRZELECKI i Marek KORDOS