Cztery barwy i okolice

Paweł STRZELECKI

Zagadnienie czterech barw i związane z nim problemy kolorowania map (czy też, jeśli ktoś woli bardziej fachową terminologię, grafów) to ciekawy temat, o którym pisaliśmy już w *Delcie*, m.in. w numerze 5/1996. Jak wiadomo, podany w 1976 roku przez Hakena i Appela dowód twierdzenia o czterech barwach należy do najbardziej kontrowersyjnych osiągnięć matematyki dwudziestowiecznej, ze względu na wykorzystanie w nim komputerów na niespotykaną wcześniej skalę. Dowód ten nadał nowy sens pytaniom o to, czym właściwie jest dowodzenie i czy każde rozumowanie matematyczne można – poświęciwszy na to odpowiednio dużo czasu – starannie prześledzić i sprawdzić.

Dla tych, którzy w twierdzenie o czterech barwach nie wierzą, mamy dobrą wiadomość. Otóż przed dwoma laty pojawił się nowy dowód tego wyniku, również wykorzystujący komputer, ale w sposób istotnie mniej skomplikowany od tego, co robili Haken i Appel. Jego autorami są panowie: Robertson, Sanders, Seymour i Thomas z Atlanty. Jak piszą we wstępie do swojej pracy, zamierzali – głównie dla spokoju własnych sumień – sprawdzić dowód Appela i Hakena, lecz szybko ten zamiar porzucili, stwierdzając, że znacznie łatwiej będzie znaleźć nowy, niezależny dowód.

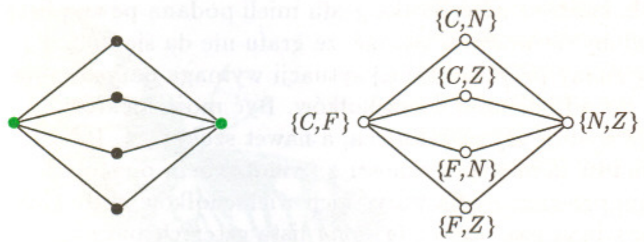
Kto szuka, ten znajdzie: praca wspomnianych czterech autorów, która otwiera tom 70 *Journal of Combinatorial Theory* z 1997 roku, liczy wraz z ilustracjami 43 strony tekstu, napisanego stosunkowo elementarnym językiem. Dwa spośród licznych lematów o kombinatorycznym charakterze zostały dowiedzione z pomocą komputera, lecz, po pierwsze, setka godzin pracy dużej maszyny, której potrzebowali Appel i Haken, została zastąpiona mniej więcej trzema godzinami pracy przeciętnej stacji roboczej, a po drugie, skrócenie czasu obliczeń nie jest jedynie wynikiem postępu w szybkości procesorów. Szczegółowe wydruki z dowodami wspomnianych dwóch lematów zajęłyby mniej więcej jeden rocznik *Delty*, można więc sobie wyobrazić, że odpowiednio zacięty człowiek zdołałby je samodzielnie przeczytać i sprawdzić. W przypadku dowodu Hakena i Appela taka operacja byłaby raczej nie do pomyślenia.

Oba komputerowe dowody twierdzenia o czterech barwach zawierają w istocie pewien algorytm kolorowania każdej mapy. Dowód Hakena i Appela prowadzi do algorytmu kolorowania, który działa w czasie proporcjonalnym do czwartej potęgi liczby państw na mapie. Natomiast dowód Robertsona, Sandersa, Seymoura i Thomasa daje algorytm, który mapę złożoną z p państw pozwala pokolorować w czasie rzędu p^2, a więc nieporównanie szybciej.

Między starym i nowym dowodem jest jeszcze jedna, dość istotna różnica. Nowy został szybko sprawdzony przez recenzentów, którzy zapędzili swych doktorantów do niezależnego napisania niezbędnych programów, sprawdzających poprawność wspomnianych dwóch lematów – z pozytywnym skutkiem. Ponadto, każdy zainteresowany może poznać wszystkie szczegóły dowodu: wystarczy sięgnąć po *Journal of Combinatorial Theory*, a wszystkie programy i dodatkowe informacje ściągnąć z serwera `ftp.math.gatech.edu`, z dostępnego dla publiczności katalogu `pub/users/thomas/four`.

Dla tych, którzy sądzą, że z kolorowaniem map wiążą się jedynie rozumowania zawiłe, udowodnimy w dość prosty sposób, iż każdą mapę na płaszczyźnie można dobrze pomalować pięcioma barwami. Słowo *dobrze* tu i dalej oznacza: w taki sposób, by każde dwa państwa, które mają wspólny odcinek granicy, były różnego koloru. Nie będziemy rozważać map, tylko grafy: państwa będą wierzchołkami grafu, a dwa wierzchołki łączymy krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im państwa graniczą ze sobą. Założymy oczywiście, że graf jest spłaszczalny, tzn. można go narysować na kartce papieru tak, by żadne dwie krawędzie nie przecinały się. Graf jest pokolorowany dobrze, gdy każda krawędź ma końce różnych kolorów.

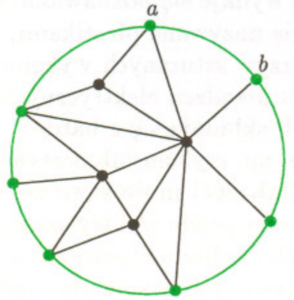
Rozwiązanie zadania M 877.
Z założenia $a+b+c=0$ mamy $(a+b)^3=(-c)^3$, a dalej
$$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=3abc.$$
Podobnie $x^3+y^3+z^3=3xyz$. Dzieląc otrzymane równości stronami, otrzymujemy tezę zadania.



Rys. 1. Tzw. *graf dwudzielny* $K_{2,4}$ można dobrze pokolorować dwiema barwami (lewa część rysunku). Jednak, gdy dla każdego wierzchołka podamy z góry listę dwóch kolorów, to dobre kolorowanie może nie istnieć (prawa część rysunku): w podanym przykładzie każda para barw, które można wybrać do pomalowania dwóch górnych wierzchołków, stanowi zarazem listę barw dla jednego z dolnych wierzchołków, co jest przyczyną nieuchronnego konfliktu kolorów.

Podany niżej dowód indukcyjny znalazł pięć lat temu Carsten Thomassen. Żeby ułatwić sobie zadanie, wzmocnimy nieco tezę. Przypuścimy, po pierwsze, że dla każdego wierzchołka w grafu G podana jest pewna lista L_w różnych barw, których można użyć do kolorowania tego wierzchołka. Dla różnych wierzchołków listy mogą być różne, co, jak pokazuje przykład na rysunku 1, wcale nie ułatwia kolorowania.

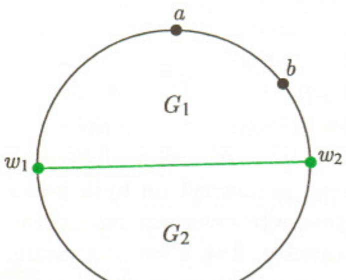
Po drugie, założymy, że dla każdego wierzchołka w na *obwodzie* grafu (proszę spojrzeć na rysunek 2) lista L_w zawiera trzy kolory, a dla każdego wierzchołka w we *wnętrzu* grafu – pięć kolorów. Po trzecie, założymy, że wybrane dwa sąsiednie wierzchołki a i b, które leżą na obwodzie grafu, już zostały pokolorowane odpowiednio kolorami A i B, przy czym $A \neq B$. Po czwarte wreszcie, założymy bez zmniejszenia ogólności, że krawędzie dzielą wnętrze grafu na „trójkąty". (Gdyby tak nie było, zawsze można dodać nowe krawędzie, pokolorować tak uzyskany graf, a potem dodane krawędzie wytrzeć – stary graf też będzie dobrze pokolorowany.)



Rys. 2. Kolorowa linia to *obwód* grafu G. Wierzchołki oznaczone czarnymi kropkami znajdują się we *wnętrzu* grafu. Krawędzie dzielą wnętrze grafu na trójkąty.

Przez indukcję względem liczby wierzchołków udowodnimy, że wierzchołki każdego grafu G, który spełnia cztery powyższe założenia, można dobrze pokolorować, kolorując każdy wierzchołek w pewnym kolorem z jego listy L_w. Początek jest banalny: gdy graf ma tylko trzy wierzchołki, teza jest oczywista. Załóżmy więc, że teza zachodzi dla każdego grafu, który ma nie więcej niż n wierzchołków. Pokażemy, że jeśli G ma $n+1$ wierzchołków, to twierdzenie też zachodzi.

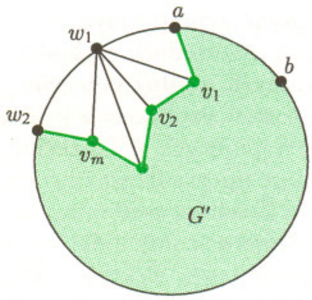
Rozważymy dwa przypadki. Załóżmy najpierw, że graf G ma *cięciwę*, to znaczy krawędź, która łączy dwa niesąsiednie wierzchołki w_1 i w_2 położone na obwodzie grafu (proszę spojrzeć na rysunek 3).



Rys. 3. Krawędź w_1w_2 to *cięciwa*.

Cięciwa dzieli graf G na dwie części, G_1 i G_2; każda z tych części ma nie więcej niż n wierzchołków. Przyjmijmy, że wierzchołki a i b leżą na obwodzie części G_1 (być może któryś z nich pokrywa się z w_1 lub w_2 – w niczym to nam nie przeszkadza). Korzystając z założenia indukcyjnego, kolorujemy graf G_1. Wierzchołki w_1 i w_2, które są sąsiednimi wierzchołkami obwodu grafu G_2, zostały pokolorowane różnymi kolorami. Możemy więc powtórnie skorzystać z założenia indukcyjnego i pokolorować graf G_2. To kończy dowód kroku indukcyjnego w przypadku, gdy graf G ma cięciwę.

Załóżmy teraz, że G nie ma cięciwy. Niech w_1 będzie wierzchołkiem, który na obwodzie grafu G sąsiaduje z a (i jest różny od b, patrz rysunek 4), w_2 zaś – różnym od a sąsiadem w_1 na obwodzie grafu. Końce krawędzi wychodzących z wierzchołka w_1 oznaczmy przez $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Wierzchołki a i w_2 połączone są łamaną $av_1v_2 \ldots v_mw_2$, na rysunku zaznaczoną kolorem.



Rys. 4

Na liście L_{w_1} kolorów dopuszczalnych dla wierzchołka w_1 mamy trzy barwy. Od A, czyli od danej barwy wierzchołka a, różnią się przynajmniej dwie z nich. Dla ustalenia uwagi oznaczmy je C i D. Wykreślmy C i D z list kolorów wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Nowa lista kolorów każdego z tych wierzchołków będzie zawierała (przynajmniej) trzy pozycje.

Niech G' będzie grafem, który powstaje z G przez usunięcie wierzchołka w_1 i wszystkich wychodzących zeń krawędzi. Ponieważ G' ma n wierzchołków, więc na mocy założenia indukcyjnego możemy dobrze pokolorować G' (używając do kolorowania $v_1, v_2, \ldots, v_m$ kolorów z nowych, mniejszych list). Żeby pokolorować cały graf G, trzeba jeszcze tylko wybrać kolor dla wierzchołka w_1. Nie jest to jednak kłopot, bowiem przynajmniej jeden z kolorów C i D jest różny od koloru, którym został pomalowany wierzchołek w_2. To spostrzeżenie kończy dowód w drugim przypadku.

A co byłoby, gdybyśmy dla każdego wierzchołka grafu mieli podaną pewną listę czterech barw? Otóż, mogłoby się wówczas okazać, że grafu nie da się dobrze pokolorować. Najmniejszy znany przykład takiej sytuacji wymaga narysowania zawiłego grafu, który ma ponad pół setki wierzchołków. Być może niektórym Czytelnikom ta informacja wydaje się zaskakująca, a nawet szokująca. Proszę jednak zauważyć, że nie ma tu żadnej sprzeczności z twierdzeniem o czterech barwach: zakładamy w nim przecież, iż dla wszystkich wierzchołków grafu (jak kto woli, państw na mapie) dana jest *jedna i ta sama* lista czterech barw.

Uroda matematyki polega zarówno na tego typu zaskakujących odmiennościach, do których prowadzą pozornie nieznaczące zmiany założeń, jak i na tym, że wolno mieć nadzieję, iż ktoś kiedyś znajdzie równie niedługi, elementarny, prosty i elegancki dowód twierdzenia już nie o pięciu, lecz o czterech barwach.

Jak plastiki przewodzą prąd elektryczny?

Stanisław BEDNAREK

Na pierwszy rzut oka pytanie postawione w tytule wydaje się pozbawione sensu. Wiadomo przecież, że tworzywa sztuczne, potocznie nazywane plastikami, nie przewodzą prądu elektrycznego. Dlatego z tworzyw sztucznych wykonuje się izolacje rozmaitych przewodów i obudowy wielu urządzeń elektrycznych. Tworzywa sztuczne mają budowę polimerową, czyli składają się z bardzo wielu cząsteczek określonego związku chemicznego, np. etylenu lub acetylenu, połączonych w łańcuchy lub sieci. Jeden łańcuch (lub sieć) może zawierać nawet kilka milionów cząsteczek. Przyczyną nieprzewodzenia prądu elektrycznego przez tworzywa sztuczne jest brak w nich mogących swobodnie poruszać się cząstek obdarzonych ładunkiem elektrycznym, nazywanych nośnikami prądu elektrycznego. Rolę tych nośników mogą spełniać elektrony, jak to ma miejsce w metalach, lub elektrony i jony występujące w elektrolitach i rozrzedzonych gazach. Okazuje się jednak, że twierdzenie *wszystkie tworzywa sztuczne nie przewodzą prądu elektrycznego* jest fałszywe.

Przed prawie trzydziestu laty Hideiki Shirakawa prowadził w Politechnice Tokijskiej badania nad otrzymywaniem jednego z polimerów – poliacetylenu. Zmęczony zapewne długotrwałą pracą popełnił błąd. Pomylił naczynia z odczynnikami i w ten sposób w mieszaninie ulegającej reakcji znalazło się wielokrotnie więcej katalizatora, niż być powinno. Otrzymany polimer nie wyglądał zbyt atrakcyjnie, ale jego przewodność właściwa była około stu miliardów razy większa niż przewodność właściwa polietylenu – tworzywa sztucznego, z którego najczęściej wytwarza się izolacje przewodów elektrycznych. Mimo tego przewodność właściwa tego niezwykłego poliacetylenu była jeszcze ponad sto miliardów razy mniejsza niż przewodność właściwa miedzi, która jest jednym z najlepszych przewodników elektryczności. Tak więc otrzymany przez Shirakawę materiał należało zaliczyć raczej do półprzewodników. Dopiero dodanie atomów jodu do tego poliacetylenu spowodowało, że jego przewodność właściwa osiągnęła wartość około sześciu razy mniejszą niż przewodność miedzi. Obecnie znanych jest ponad dwadzieścia przewodzących polimerów.

Ze względu na swoje dobre przewodnictwo elektryczne, zbliżone do przewodnictwa metali, polimery te nazywane są czasem syntetycznymi metalami. Przewodzenie prądu elektrycznego w tych materiałach zachodzi dzięki transportowi swobodnych ładunków elektrycznych wzdłuż łańcucha polimeru. Ładunek taki w postaci elektronu może zostać uwolniony z jednego z podwójnych sprzężonych wiązań chemicznych występujących w łańcuchu. Przyłożenie pola elektrycznego do polimeru powoduje uporządkowany ruch tych ładunków, czyli przepływ prądu elektrycznego. Źródłem swobodnych ładunków elektrycznych są też wprowadzone do polimeru atomy niektórych pierwiastków, np. jodu lub sodu. Atomy sodu mogą oddawać elektrony, które stają się swobodne i uczestniczą w przewodzeniu prądu. Z kolei atomy jodu przyłączają elektrony, a pozostałe po elektronach obszary zachowują się jak