Sumowanie odwrotności

Paweł STRZELECKI

Suma odwrotności wszystkich liczb naturalnych jest nieskończona. Spośród niezliczonych dowodów tego faktu przypomnijmy dla porządku jeden: gdyby ciąg $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ miał skończoną granicę S, to istniałaby liczba $n \in \mathbb{N}$ o tej własności, że $|S - S_n| < \frac{1}{2}$. W szczególności, nierówność $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k} < \frac{1}{2}$ zachodziłaby wtedy dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Tymczasem,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

a zatem ciąg S_n nie ma skończonej granicy.

To, czy dodając odwrotności wszystkich liczb naturalnych należących do pewnego podzbioru $A \subset \mathbb{N}$, otrzymamy skończony wynik, zależy od tego, czy zbiór A jest odpowiednio „mały”. Jeśli, na przykład, zbiór A składa się tylko z potęg pewnej liczby większej od 1 – powiedzmy 2, 3 czy 5 – to wtedy suma wszystkich odwrotności liczb ze zbioru A jest skończona. (Jeśli ktoś nie wie, dlaczego tak jest, niech przeczyta *Małą Deltę* o dzieleniu pomarańczy.) Popatrzmy teraz na inne sytuacje.

Przykład 1. Gdy wiadomo już, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, nietrudno wykazać, że

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = +\infty \qquad (1)$$

dla każdego $A \subset \mathbb{N}$, który spełnia następujący warunek: dla pewnej liczby $\delta > 0$ część wspólna zbioru A i zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ ma, dla wszystkich dostatecznie dużych n, przynajmniej $[\delta n]$ elementów.

Intuicyjnie biorąc, własność (1) jest wtedy oczywista: zbiór A jest stosunkowo duży, zawiera „ustalony procent” liczb naturalnych, więc i suma odwrotności wszystkich liczb z tego zbioru jest „ustalonym procentem” (nieskończonej) sumy wszystkich odwrotności $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Czytelnicy bez trudu zdołają zamienić to intuicyjne rozumowanie w ścisły dowód.

Jeśli weźmiemy mniejszy zbiór A, utworzony z rzadziej rozrzuconych liczb naturalnych, wtedy z sumą odwrotności może być rozmaicie. Oto kolejne przykłady.

Przykład 2. Suma odwrotności wszystkich pełnych kwadratów jest skończona, gdyż z oczywistej nierówności $\frac{1}{n^2} \leq 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)}$ oraz równości $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ wynika, że dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} \leq 2 \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$
$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < 2.$$

Dodając odwrotności pełnych kwadratów, z pewnością nie otrzymamy więc wyniku większego od 2.

Przykład 3. Gdy jako A weźmiemy zbiór wszystkich liczb pierwszych, to wtedy suma $\sum\limits_{p \in A} \frac{1}{p}$ będzie nieskończona – co oznacza, że liczb pierwszych jest (w pewnym sensie) znacznie więcej niż pełnych kwadratów. Rozbieżności szeregu odwrotności wszystkich liczb pierwszych dowiódł Leonard Euler. Przedstawimy tu znacznie późniejszy dowód tego faktu, pochodzący od amerykańskiego matematyka I. Nivena.

Rozwiązanie zadania M 892. Rozważmy prostokąt P o wierzchołkach w punktach $A(0,0)$, $B(p,0)$, $C(p,q)$ i $D(0,q)$. Liczba punktów kratowych (o współrzędnych całkowitych) wewnątrz P jest równa $(p-1)(q-1)$. Ponieważ liczby p i q są względnie pierwsze, więc jedynymi punktami kratowymi na przekątnej AC są jej końce. Zatem trójkąt ABC zawiera w swoim wnętrzu $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ punktów kratowych. Z drugiej strony, liczba punktów kratowych o pierwszej współrzędnej równej k $(0 < k < p)$, należących do wnętrza $\triangle ABC$, jest równa $\left[\frac{kq}{p}\right]$. Sumując względem k, otrzymujemy żądaną równość.

Dowód prowadzimy nie wprost. Niech $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$ będzie ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Załóżmy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} < +\infty$. Istnieje wtedy taka liczba M, że $\sum\limits_{p_n \le k} \frac{1}{p_n} < M$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Z nierówności $\exp(x) = e^x \geq$ $\geq 1 + x$ otrzymujemy

$$\exp(M) \geq \exp\left(\sum_{p_n \le k} \frac{1}{p_n}\right) = \prod_{p_n \le k} \exp\left(\frac{1}{p_n}\right) \geq$$
$$\geq \prod_{p_n \le k}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right) \geq \sum_{n \le k}{}' \frac{1}{n} = S'_k\,,$$

gdzie suma z primem, $S'_k = \sum\limits_{n \le k}{}' \frac{1}{n}$, oznacza sumę odwrotności wszystkich liczb *bezkwadratowych* – to znaczy takich, które nie są podzielne przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1, albo równoważnie, są iloczynem *różnych* liczb pierwszych.

Ostatnia nierówność bierze się stąd, że mnożąc wszystkie nawiasy $(1 + \frac{1}{p_n})$, otrzymujemy sumę odwrotności wszystkich liczb bezkwadratowych, których czynniki pierwsze nie przekraczają k. Suma ta jest, oczywiście, większa niż S'_k, gdyż prócz odwrotności wszystkich liczb bezkwadratowych nie większych od k zawiera też odwrotności niektórych większych liczb.

Pomnóżmy prawą stronę otrzymanej nierówności przez sumę $\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$, która, jak już wiemy, z pewnością jest mniejsza od 2. Otrzymamy wtedy nową nierówność

$$2\exp(M) \geq \left(\sum_{n \le k}{}' \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}\right).$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze wynika, że mnożąc składniki obu nawiasów po prawej stronie, z pewnością otrzymamy odwrotności wszystkich liczb naturalnych nie większych od k, a prócz tego odwrotności niektórych większych liczb. Zatem

$$2\exp(M) \geq S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}\,.$$

To już jest oczywista sprzeczność: dla k dążących do nieskończoności prawa strona nierówności może być dowolnie duża, natomiast lewa strona w ogóle od k nie zależy. Owa sprzeczność wzięła się stąd, że przypuściliśmy, iż szereg odwrotności liczb pierwszych jest zbieżny – a zatem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$.

Z sumowaniem odwrotności liczb naturalnych wiąże się następująca, do dziś otwarta, hipoteza Erdősa:

Niech A będzie takim podzbiorem zbioru liczb naturalnych, że

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = +\infty\,.$$

Wtedy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zbiór A zawiera pewien ciąg arytmetyczny długości k.

Każdy widzi, że dla $A = \mathbb{N}$ to prawda (i nie jest to zbyt odkrywcze spostrzeżenie). Wykazać, że jest tak również dla takich zbiorów A, o jakich była mowa w Przykładzie 1, jest bardzo trudno – tę wersję hipotezy Erdősa udowodnił w 1975 roku Szemerédi. Dla tego przypadku nowy, istotnie inny dowód podał niedawno William Timothy Gowers, jeden z ubiegłorocznych medalistów Fieldsa, nagrodzony przede wszystkim za wyniki z zakresu analizy funkcjonalnej – i było to osiągnięcie, o którym wspomniano przy okazji nadawania medalu.

A w ogólnym przypadku nic nie wiadomo nawet dla $k = 3$, czyli dla najmniejszej liczby k, dla której określenie *ciąg arytmetyczny długości k* cokolwiek znaczy.

Rozwiązanie zadania M 894.
Obliczmy, ile liczb postaci x^y, gdzie x, y są liczbami całkowitymi większymi od 1, zawiera zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$. Możemy to zrobić na dwa sposoby. Dla ustalonej podstawy x liczb takich jest $[\log_x n] - 1$, a dla ustalonego wykładnika y jest ich $[\sqrt[y]{n}] - 1$. Sumując te wyrażenia, otrzymujemy

$$\sum_{x=2}^{n} [\log_x n] - (n-1) =$$
$$= \sum_{y=2}^{n} [\sqrt[y]{n}] - (n-1),$$

a stąd natychmiast wynika żądana równość.