

Oznaczmy

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

Jest to równoważne

$$x + 1 = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

czyli $x + 1 = 2 + \frac{1}{x+1}$, co dla $x \neq -1$ jest równoważne $x^2 = 2$. Oczywiście, żeby tak pisać, trzeba wiedzieć, że nieskończony ułamek przedstawiający x jest zbieżny.

Można chwilę poćwiczyć i wykonywać podobnie zamianę danego nieskomplikowanego równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych (oczywiście mającego pierwiastek) na ułamek łańcuchowy. Dla skomplikowanych potrzebny jest dowód z artykułu.

Warto tu przypomnieć inne twierdzenie Lagrange'a o ułamkach łańcuchowych: dają one najlepsze przybliżenia wymierne liczb niewymiernych. Znaczący to tyle, że jeśli początkowy fragment ułamka łańcuchowego, dla jakiejś liczby niewymiernej a , jest zwykłym ułamkiem nieskracalnym, to lepsze przybliżenia wymierne a można otrzymać tylko używając ułamków o większym mianowniku. Tak więc (patrz początek tej notki) $\frac{41}{29}$ jest najlepszym przybliżeniem $\sqrt{2}$ spośród ułamków o mianownikach mniejszych od 30.

Ułamki łańcuchowe wymyślił grecki matematyk Teajtetos (410–368 p.n.e.), uczeń Platona. Mają więc te ułamki już 2400 lat, zatem są prawie dwukrotnie starsze od ułamków dziesiętnych. Zostały one wymyślone właśnie dla poradzenia sobie z niewymiernością. Później jednak straciły pierwszoplanową pozycję w arytmetyce.

M.K.



Zadania

Redaguje *Lukasz WIECHECKI*

M 892. Wykazać, że jeśli p i q są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, to

$$\left[\frac{q}{p}\right] + \left[\frac{2q}{p}\right] + \left[\frac{3q}{p}\right] + \dots + \left[\frac{(p-1)q}{p}\right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Rozwiązanie na str. 12

M 893. Udowodnić, że jeśli $\tau(k)$ jest liczbą dzielników naturalnych liczby k , to dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{n}\right] = \tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(n).$$

Rozwiązanie na str. 14

M 894. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ zachodzi równość

$$[\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \dots + [\sqrt[n]{n}] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + \dots + [\log_n n].$$

Rozwiązanie na str. 13

Redaguje *Ewa CZUCHRY*

F 507. Załóżmy, że na polaryzator pada wiązka światła spolaryzowanego liniowo. W przypadku, gdy oś polaryzatora jest równoległa do osi polaryzacji, zostaje przepuszczona część α^2 natężenia, natomiast gdy kąt między tymi osiami jest prosty – część ϵ^2 . (Dla idealnego polaryzatora $\alpha^2 = 1$, $\epsilon^2 = 0$.) Jakie będzie natężenie przepuszczonego światła, jeżeli na parę polaryzatorów, których osie tworzą kąt θ , pada prostopadłe światło niespolaryzowane o natężeniu I_0 ? (Odbicia pomijamy.)
Rozwiązanie na str. 11

F 508. Między dwa polaryzatory o wzajemnie prostopadłych osiach wsunięto trzeci polaryzator o osi tworzącej kąt θ z osią pierwszego polaryzatora. Jakie jest natężenie światła przepuszczanego przez ten układ? (Zakładamy, że polaryzatory są idealne i straty pomijamy.)
Rozwiązanie na str. 16