Skąd się wzięły liczby zespolone?

4 lutego 1535 roku Tartaglia odkrył, że przez zmyślne podzielenie sześcianu można dojść do algorytmu rozwiązującego **dla dodatnich** a i b równanie

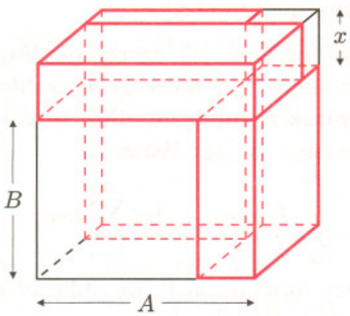
$$x^3 + ax = b, \quad \text{czyli} \quad x^3 + ax - b = 0.$$

Wzór był taki

$$\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2}},$$

z czego wynika, że otrzymany pierwiastek był także dodatni.

Oto sposób Tartaglii. Wycinając przy przeciwległych wierzchołkach sześcianu o krawędzi A sześcian o krawędzi B i sześcian o krawędzi x, możemy dostrzec, że pozostałość daje się podzielić na trzy jednakowe „cegiełki" – prostopadłościany o krawędziach długości A, B i x. Stąd mamy



$$A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx, \quad \text{czyli} \quad x^3 + 3ABx = A^3 - B^3,$$

co jest równaniem takim, jak wyjściowe. Mamy więc

$$a = 3AB \quad \text{i} \quad b = A^3 - B^3.$$

Podstawiając $p = A^3$, $q = B^3$, otrzymujemy

$$pq = \frac{a^3}{27} \quad \text{i} \quad p - q = b, \quad \text{co daje} \quad q^2 + bq = \frac{a^3}{27},$$

skąd mamy (q jest dodatnie!)

$$q = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{b}{2} \quad \text{i} \quad p = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{b}{2}.$$

Wracając do rysunku, mamy

$$x = A - B = \sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q},$$

czyli właśnie wzór Tartaglii.

Od razu powstał problem, jak ogólny jest ten wynik, czyli – czy wzór można stosować bez ograniczeń na a i b, oraz czy da się go uogólnić na przypadek „pełnego" równania trzeciego stopnia. Na drugie pytanie odpowiedź jest pozytywna i ma proste uzasadnienie: jeśli w równaniu

$$y^3 + sy^2 + ty + u = 0$$

podstawimy $y = x - \frac{1}{3}s$, to wyraz z drugą potęgą zniknie. Pozostaje zatem pierwszy problem.

Gdy nie mamy wstrętu do liczb ujemnych (i rachowania), to sprawdzamy bezpośrednio, iż np. do równań

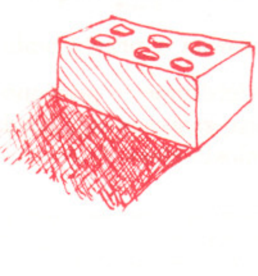
$$x^3 - 6x - 9 = 0, \quad x^3 - 6x + 9 = 0, \quad x^3 + 6x + 7 = 0$$

wzór się nadaje (uwaga na znak przy wyrazie wolnym!). Łatwo też stwierdzamy, jaka jest granica takiej bezproblemowej stosowalności wzoru: jest to warunek, by wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym było nieujemne, czyli znak b nie odgrywa żadnej roli, natomiast musi być

$$a \geq -\sqrt[3]{\frac{27}{4}b^2}.$$

Co jednak zrobić, gdy warunek ten nie jest spełniony?

Z faktu, że wielomian stopnia trzeciego dla bardzo małych liczb (ujemnych, o dużych wartościach bezwzględnych) przyjmuje wartości ujemne, a dla bardzo dużych – dodatnie, wynika, że zawsze ma pierwiastek rzeczywisty. Stąd pokusa, aby jakimiś zręcznymi manipulacjami uzyskać ten pierwiastek również, gdy podany warunek nie jest spełniony (takie równanie nazywa się *nieprzywiedlne*; później okazało się, że ma zawsze aż trzy pierwiastki rzeczywiste). Stosowne manipulacje zaproponował Cardano dziesięć lat później. Manipulacje te to rachowanie na liczbach zawierających składnik $\sqrt{0\ m.\ a}$ (gdzie $a > 0$), jak pisano, co jest zakamuflowanym oznaczeniem dla $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$. I tak po raz pierwszy zapisano liczby zespolone. Istotą tych zabiegów, mówiąc dzisiejszym językiem, było takie operowanie nowymi obiektami, aby wykazać, że odejmowane we wzorze Tartaglii pierwiastki stopnia trzeciego reprezentują liczby zespolone o takich samych częściach urojonych. I wtedy okazało się, że takim sposobem można zawsze za pomocą wzorów Tartaglii znaleźć pierwiastek rzeczywisty równania stopnia trzeciego.



Napisałem wyżej, że Cardano manipulował „obiektami", zamiast „liczbami". Użyłem tego zwrotu dlatego, że sam Cardano używanych przez siebie liczb zespolonych wcale za liczby nie uważał. Mówił on o swoich manipulacjach, że jest to hiperbola intelektualna: umysł matematyka potrafi wznieść się na niedostępne dla profanów wyżyny, tam obcować z niedostępnymi dla nich obiektami, by – po uzyskaniu rozwiązania równania – z gotowym wynikiem na Ziemię do profanów powrócić. Status przyzwoitych liczb dla liczb zespolonych wywalczył dopiero Gauss, dowodząc w 1799 roku ich domkniętości algebraicznej (czyli tego, że każdy wielomian – różny od stałej – o współczynnikach zespolonych ma zespolony pierwiastek – patrz str. 8).

Wzory, które podał Tartaglia, są dziś nazywane wzorami Cardano, a to z dwóch przyczyn. Pierwsza to ta, że je tak bardzo uogólnił, druga zaś taka, że pierwszy je opublikował. Czy to słuszne – historycy spierają się bez końca.

Marek KORDOS