

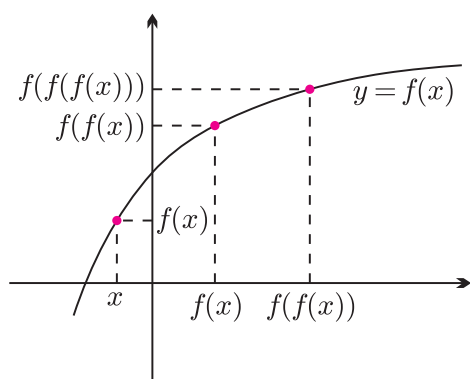
# 5

# mała delta

## Pająk i mucha

Wyobraźmy sobie muchę, która porusza się po wykresie funkcji  $y = f(x)$  w następujący sposób. Jeśli w danej chwili znajduje się w punkcie  $(x, f(x))$ , to sekundę później znajdzie się w punkcie  $(f(x), f(f(x)))$ . W ten sposób „igrekowe” współrzędne punktów wykresu, w jakich przebywa mucha, tworzą ciąg tzw. iteracji funkcji  $f$  (rys. 1).

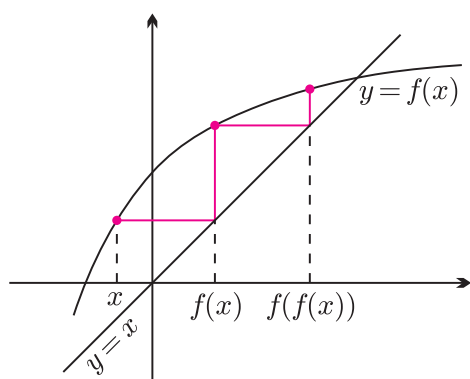
$f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$



Rys. 1

Można oczywiście nie wierzyć, że jakakolwiek mucha dałaby sobie radę z tak skomplikowanym ruchem, ale czy rzeczywiście jest to ruch aż tak skomplikowany? Chyba nie.

Dorysujmy bowiem do wykresu funkcji  $f(x)$  prostą  $y = x$  (rys. 2). Mucha ma przeskoczyć z punktu  $(x, f(x))$  do punktu, który leży na wykresie funkcji  $f$  i którego pierwsza współrzędna jest równa  $f(x)$ . Jak znaleźć ten punkt?

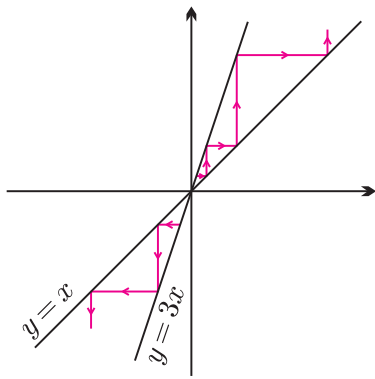


Rys. 2

Wystarczy polecieć poziomo do prostej  $y = x$ , tam się zatrzymać (nasza współrzędna „iksowa” jest teraz równa  $f(x)$ ) i polecieć wzdłuż prostej pionowej (czyli nie zmieniając naszej pierwszej współrzędnej) aż do spotkania z wykresem.

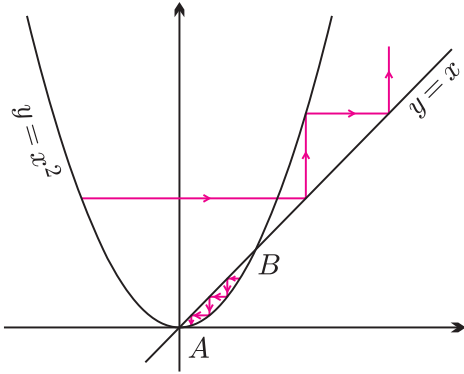
Nie jest to trudne nawet dla muchy. Popatrzmy zatem na kilka przykładowych torów jej lotu dla dwóch różnych funkcji  $f$ .

Zauważmy, że są na rysunkach takie punkty, w których mucha zanudziłaby się na śmierć.



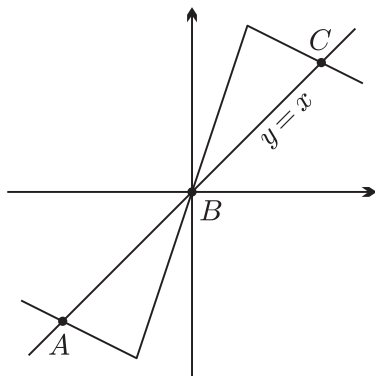
Rys. 3.  $f(x) = 3x$

Rzeczywiście: jeśli na rysunku 3 mucha usiadzie najpierw w punkcie  $(0,0)$ , to nigdzie już nie pójdzie. Ale każda mucha siedząca obok uciekać będzie od punktu  $(0,0)$  jak najdalej.



Rys. 4.  $f(x) = x^2$

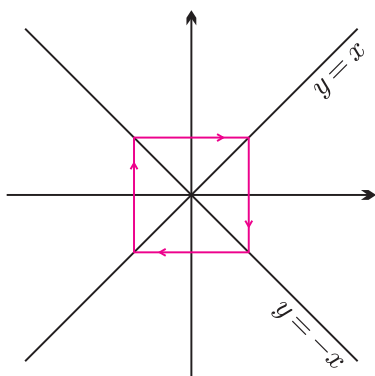
Na rysunku 4 muchy siedzące w punktach  $A = (0,0)$  i  $B = (1,1)$  też pozostałyby w tych punktach na zawsze. Punkty  $A$  i  $B$  różnią się jednak i to znacznie: punkt  $A$  przyciąga okoliczne muchy, a punkt  $B$  je odpycha! Głodny pająk powinien czatować więc w punkcie  $A$  i trzymać się z daleka od punktu  $B$ .



Rys. 5

A gdzie powinien zacząć się na rysunku 5? W punkcie  $A$ ,  $B$  czy  $C$ ?

Powstaje zresztą pytanie, czy mucha zawsze musi uciec nieograniczenie daleko albo wpaść do jakiejś „pajęcznej sieci”?



Rys. 6

Oczywiście, nie. Może na przykład zostać uwięziona na takiej oto orbicie.

Jak widzimy, teraz mucha odwiedza tylko dwa punkty na wykresie.

A czy potraficie narysować taki wykres i takie początkowe położenie muchy, by odwiedzała ona dokładnie trzy punkty? Cztery punkty? Pięć punktów?

*Mała Delta przygotował Witold SADOWSKI*