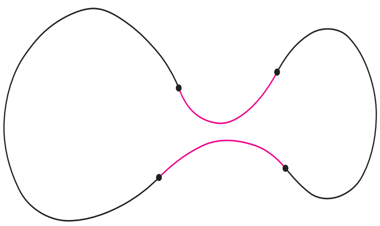
Jak pryska bańka mydlana?

Paweł STRZELECKI

W ostatnich kilkunastu latach na pograniczu geometrii różniczkowej i teorii równań różniczkowych rozrósł się nowy, pokaźny dział matematyki, poświęcony badaniom krzywych i powierzchni, które poruszają się zgodnie z jakimś określonym przepisem, zmieniając wraz z upływem czasu swój charakter i własności. Różne punkty mogą przy tym poruszać się z różnymi prędkościami, wyznaczonymi przez rozmaite geometryczne charakterystyki krzywej czy powierzchni. Badania te mają z jednej strony wyraźny kontekst stosowany (proszę pomyśleć, ilu w szerokim świecie jest bogatych sponsorów, których może interesować ruch cieniutkiej granicy między płynnym metalem a zakrzepłym stopem, albo ruch linii oddzielającej wilgotną jeszcze farbę od zaschniętej warstewki lakieru), z drugiej zaś wiążą się blisko z najpoważniejszymi problemami współczesnej geometrii.

Z obu powodów warto przedstawić Czytelnikom *Delty* choćby czubek góry lodowej – i opowiedzieć kilka słów o przykładach pojęciowo najprostszych, a przy tym dostatecznie ciekawych i trudnych. Chodzi o tak zwaną ewolucję krzywiznową. Podlegająca jej płaska krzywa zamknięta porusza się zgodnie z następującym przepisem: w ustalonej chwili wektor prędkości każdego punktu krzywej jest prostopadły do krzywej i ma długość równą wartości bezwzględnej krzywizny. Zanim opiszemy kilka własności takiego ruchu krzywych płaskich, przypomnimy definicje i powiemy, jak ustala się zwrot prędkości.

Krzywizna krzywej gładkiej $y\colon I \to \mathbb{R}^3$ w punkcie $y(s)$ to odwrotność promienia tego okręgu, który najlepiej ze wszystkich „pasuje" do krzywej w okolicy punktu $y(s)$. Jeśli krzywa sparametryzowana jest długością łuku (tzn. przekształcenie y odpowiada podróży wzdłuż krzywej ze stałą, jednostkową szybkością – wektor styczny $y'(s)$ ma dla każdego s długość 1), to krzywizna jest równa liczbie $k(s) = |y''(s)|$. Dla krzywych płaskich wprowadza się krzywiznę ze znakiem.

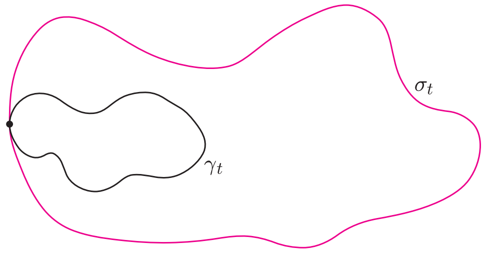


Rys. 1. Czarne części krzywej mają krzywiznę dodatnią, kolorowe – ujemną. W zaznaczonych kropkami punktach krzywizna znika.

W ewolucji krzywiznowej prędkość jest równa iloczynowi krzywizny i wektora normalnego *wewnętrznego*. Przyjęty wybór znaku krzywizny powoduje, że krzywe ograniczające zbiory wypukłe (jak np. okrąg, elipsa czy kontur jajka) – dla krótkości zwane dalej po prostu *krzywymi wypukłymi* – kurczą się. Jest jasne, że ostatecznie każda taka krzywa musi „wpaść sama na siebie". Powstaje więc naturalne pytanie: w jaki sposób się to odbywa? Czy w momencie katastrofy krzywa zamienia się w odcinek? W punkt?

Zanim odpowiemy na te pytania, podamy inne własności ewolucji krzywiznowej.

Własność pierwsza: zakaz wyprzedzania. Jeśli w chwili początkowej krzywa γ_0 znajdowała się wewnątrz obszaru ograniczonego krzywą σ_0, to podczas ewolucji krzywiznowej dla wszystkich czasów t krzywe σ_t i γ_t będą rozłączne. Dlaczego tak się dzieje? Oto szkic najważniejszego argumentu. Przypuśćmy na chwilę, że jest inaczej i w pewnej chwili t krzywa σ_t *po raz pierwszy* dotknęła γ_t. W typowej sytuacji krzywizna σ_t jest wtedy mniejsza niż krzywizna γ_t, bo przecież krzywa σ_t dotyka krzywej γ_t od zewnątrz. Zatem prędkość krzywej σ_t jest mniejsza niż prędkość γ_t, co jednak wyklucza możliwość doścignięcia. (Gdy krzywizny obu krzywych w punkcie pierwszego spotkania są równe, potrzebny jest nieco subtelniejszy argument, wnikający głębiej w teorię równań różniczkowych.)



Rys. 2. W chwili pierwszego spotkania zewnętrzna krzywa jest mniej zakrzywiona, więc powinna poruszać się wolniej.

Własność druga: pole obszaru ograniczonego przez krzywą zmniejsza się w stałym tempie. Dowód tej własności pozostawimy jako zadanie dla szczególnie zainteresowanych Czytelników.

Własność trzecia: jeśli γ_0 jest okręgiem o promieniu r_0, to γ_t jest współśrodkowym z γ_0 okręgiem o promieniu $r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2t}$. Nietrudno potwierdzić to rachunkiem. Podlegający ewolucji krzywiznowej okrąg pozostanie, rzecz jasna, okręgiem; przepis na prędkość prowadzi do równania $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{r}$. Mnożąc je stronami przez $2r$, otrzymujemy $\frac{\mathrm{d}(r^2)}{\mathrm{d}t} = -2$, czyli $r^2(t) = C - 2t$. Oczywisty dobór stałej $C = r_0^2$ prowadzi do przytoczonego wcześniej wzoru, który ma sens jedynie dla $t \in [0, t_*]$, gdzie $t_* = r_0^2/2$ jest *czasem życia okręgu.*

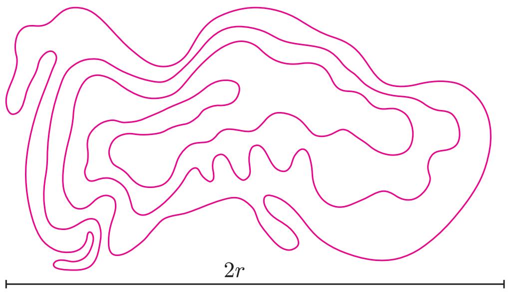
Każda krzywa zamknięta kurczy się więc proporcjonalnie szybko do pola, które początkowo ogranicza, z pewnością nie dłużej niż otaczający ją okrąg (to wynika z zakazu wyprzedzania). Pora na odpowiedź, co się dzieje w chwili ostatecznej katastrofy.

Twierdzenie 1 (M. Gage, R. Hamilton, 1986). *Każda krzywa wypukła podlegająca ewolucji krzywiznowej kurczy się do okrągłego punktu.*

Niektórzy Czytelnicy powiedzą może, że przecież wszystkie punkty są okrągłe. Sens sformułowania twierdzenia Gage'a i Hamiltona jest następujący: Przypuśćmy, że krzywe γ_t powstają w wyniku ewolucji krzywiznowej z γ_0. Jeśli tuż przed chwilą zniknięcia t_* będziemy γ_t oglądać przez mikroskop, to ujrzymy niemal idealny okrąg. Ściślej, jeśli $\widetilde{\gamma}_t$ oznacza jednokładne powiększenie γ_t w takiej skali, żeby pole wewnątrz $\widetilde{\gamma}_t$ było równe polu wewnątrz początkowej krzywej γ_0, to $\widetilde{\gamma}_t$ jest bardzo bliskie okręgu: dla $t \to t_*$ krzywizna $\widetilde{\gamma}_t$ zbiega do stałej w tempie wykładniczym, a wszystkie pochodne krzywizny są zbieżne do zera.

Okazuje się, że krzywe niewypukłe (takie, jak np. zawijas z rysunku 3) wcale nie znikają w jakiś bardziej widowiskowy sposób. Mówi o tym dość zaskakujące

Twierdzenie 2 (M. Grayson, 1987).
Każda zamknięta krzywa płaska podlegająca ewolucji krzywiznowej w skończonym czasie stanie się wypukła.



Rys. 3. Ewolucja krzywiznowa zmieni tę krzywą w brzeg obszaru wypukłego, a potem w „okrągły punkt". Stanie się to w czasie krótszym niż czas życia okręgu o promieniu r.

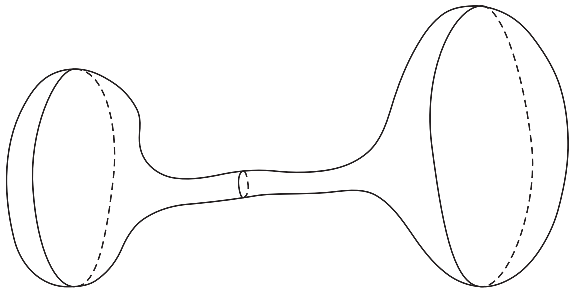
Z obu twierdzeń wynika, że wszystkie płaskie krzywe zamknięte kurczą się wskutek ewolucji krzywiznowej do okrągłych punktów.

Gdy do rozważań doda się jeden wymiar, życie stanie się ciekawsze. Rozpatrzmy gładką powierzchnię $S_0 \subset \mathbb{R}^3$ – taką, jak np. powyginana sfera, torus, czy precel – która rozpoczyna ewolucję średniokrzywiznową. Prędkość każdego punktu jest równa iloczynowi średniej krzywizny i wektora normalnego (zwrot ustalamy tak, by każda powierzchnia, która jest brzegiem zbioru wypukłego, kurczyła się do wewnątrz).

Przypomnijmy: aby mierzyć zakrzywienie powierzchni $S \subset \mathbb{R}^3$ w ustalonym punkcie $p \in S$, rozpatruje się wszystkie przekroje S płaszczyznami przechodzącymi przez p i prostopadłymi do płaszczyzny stycznej w p do S. Każdy przekrój to pewna krzywa płaska; krzywizna tej krzywej zależy w sposób ciągły od kierunku cięcia. Istnieją zatem dwa przekroje, zawierające krzywe o najmniejszej i największej krzywiźnie; owe krzywizny to *krzywizny główne* powierzchni S w punkcie p, a ich średnia arytmetyczna to właśnie krzywizna średnia. Więcej na ten temat – w podręcznikach geometrii różniczkowej i w *Delcie* 10/1996.

Niektóre własności ewolucji krzywiznowej na płaszczyźnie obowiązują i w tym przypadku. Wciąż mamy zakaz wyprzedzania, a kurcząca się sfera pozostaje sferą. G. Huisken udowodnił odpowiednik twierdzenia 1: powierzchnie, które ograniczają zbiory wypukłe, kurczą się do okrągłych punktów. (Definicja okrągłego punktu w przestrzeni jest podobna do definicji okrągłego punktu na płaszczyźnie; chodzi o to, że oglądając powierzchnię tuż przed zniknięciem przez mikroskop, widzimy niemal idealną sferę.)

Natomiast twierdzenie 2 nie ma swojego odpowiednika. Przez pewien czas znane były eksperymenty numeryczne, wskazujące, iż powierzchnia w kształcie hantelka o odpowiednio masywnych ciężarkach i długiej rączce wcale nie skurczy się do okrągłego punktu: ścianki wąskiej rureczki powpadają na siebie, zanim pokaźne, krągłe bąble zdążą się zmniejszyć. Niepewny eksperyment komputerowy nie zastąpi jednak dowodu…



Rys. 4. Hantelek.

Ścisły kontrprzykład podał w 1989 r. wspomniany już Grayson. Główna idea wykorzystuje częsty zabieg: większość równań można znacznie uprościć, rozpatrując rozwiązania obdarzone jakąś symetrią.

Grayson rozumował przez zaprzeczenie. Przypuśćmy, że hantelek Γ_0 kurczy się do okrągłego punktu po czasie t_*. Umieśćmy Γ_0 wewnątrz nieskończonej, okresowej powierzchni obrotowej S_0, złożonej z dużych obłych bąbli złączonych wąziutkimi rurkami. Powierzchnia S_0 będzie ewoluować nie krócej niż Γ_0; to wynika z zakazu wyprzedzania. Znając promień (a więc czas życia) sfery mieszczącej się w każdym bąblu, można oszacować t_* z dołu. Z drugiej strony, stosunkowo proste równanie ewolucji powierzchni obrotowej S_t startującej z S_0 pozwala oszacować tempo, w jakim zmniejsza się pole podłużnego przekroju osiowego każdej z cienkich rurek. Okazuje się, że po czasie t_* owo pole musiałoby stać się ujemne! Zatem hantelek nie kurczy się do okrągłego punktu, o ile rurka jest dostatecznie wąska i długa, a bąble pokaźne.

Elastyczna błona oddzielająca dwa obszary o różnych ciśnieniach, na przykład bańka mydlana, jest powierzchnią o stałej średniej krzywiźnie. Rozumowanie Graysona można dostosować do równania, opisującego ruch błony pod wpływem zmiennej różnicy ciśnień, spowodowanej np. dmuchaniem w bańkę mydlaną. Każdy wie, że w przestrzeni trójwymiarowej można przez słomkę wydmuchiwać bańki (i trzeba dmuchać dość mocno i w miarę regularnie – w przeciwnym razie bańka pryska albo zaczyna się kurczyć).

A biedne Płaszczaki muszą się, niestety, zabawiać inaczej.