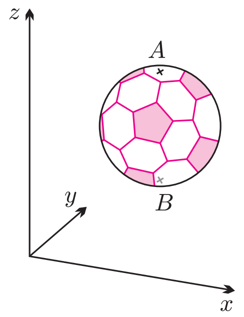
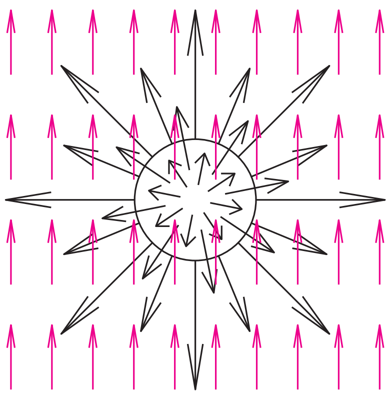
Precyzyjniej: gradient funkcji $V(x, y, z)$ to wektor

$$\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right].$$

Jak widać, żeby w ogóle mówić o gradiencie, trzeba wiedzieć, że funkcja V jest różniczkowalna.
W całym artykule będziemy zakładać, że funkcja V jest gładka, tzn. różniczkowalna dowolną liczbę razy.



Rys. 1a



Rys. 1b

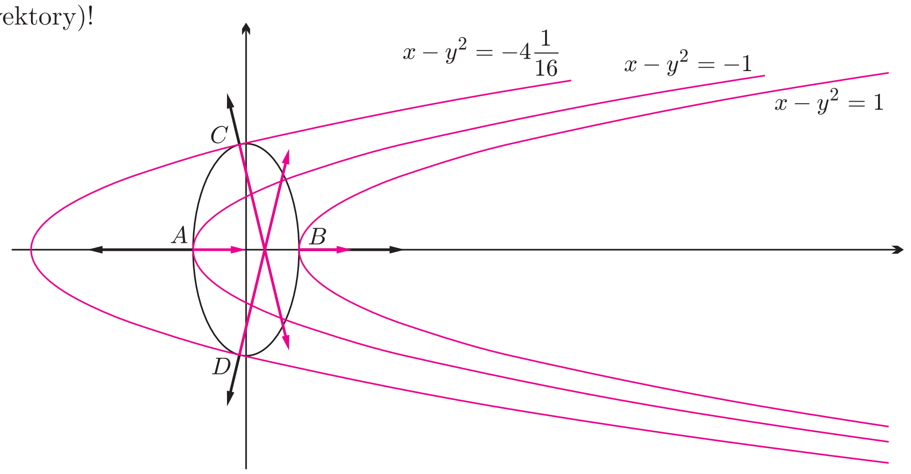
Gradient funkcji skalarnej V – oznaczany ∇V – to taki wektor, który w danym punkcie przestrzeni wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji V. Im jest dłuższy, tym wzrost funkcji większy. Trzeba jednak uczciwie przyznać, że gradient nie jest „doskonały" i ma pewną wadę: jeśli wzrost funkcji jest bardzo subtelny, to gradient go nie zauważy. Jeżeli więc gradient jest w pewnym punkcie wektorem zerowym, to nie należy od razu oczekiwać, że funkcja jest w otoczeniu tego punktu stała, tylko że tempo jej wzrostu jest wolniejsze niż liniowe.

Gradient jest przydatny z różnych względów, ale w szczególności pomocny jest w poszukiwaniu punktów, w których funkcja osiąga wartości maksymalne i minimalne. Zauważmy bowiem, że jeśli gradient jest w pewnym punkcie X niezerowy, to funkcja nie może mieć w tym punkcie ekstremum. Rzeczywiście: wartości funkcji V w stronę zwrotu gradientu (dostatecznie blisko punktu X) będą większe niż w punkcie X, a z „tyłu", tj. w stronę przeciwną do zwrotu gradientu – mniejsze. Nie może być więc w punkcie X ani maksimum, ani minimum funkcji V. Jedyna więc szansa na ekstremum jest wtedy, gdy gradient znika. Stąd ogólna metoda poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych: najpierw znajdujemy „podejrzane" punkty, czyli takie, w których gradient znika, a potem – bardziej „brutalnymi" metodami śledczymi – badamy, które z podejrzanych punktów naprawdę są minimami bądź maksimami.

A co robić w sytuacji, gdy maksimum (lub minimum) funkcji V szukamy wśród takich punktów (x, y, z), które spełniają pewien dodatkowy warunek, np. leżą na pewnej powierzchni (kuli, elipsoidzie, paraboloidzie, etc.)? Jasne jest, że w tym przypadku poszukiwanie punktów, w których znika gradient funkcji V, nie doprowadzi nas do wszystkich podejrzanych. Niech bowiem przykładowo funkcja V będzie odległością danego punktu w pokoju od podłogi i szukajmy ekstremum funkcji V na powierzchni piłki o promieniu R i środku w punkcie (x_1, y_1, z_1). W sytuacji jak na rysunku 1a szukamy zatem ekstremów funkcji $V(x, y, z) = z$ na powierzchni o równaniu $F(x, y, z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - R^2 = 0$. Widzimy, że w punkcie B mamy minimum V na powierzchni piłki, a w punkcie A maksimum. Ale ani w A, ani w B gradient V nie jest równy zeru! Narysujmy jednak pola wektorowe gradientu funkcji V i gradientu funkcji F na powierzchni piłki (rys. 1b). Okazuje się, że w punktach ekstremalnych wektory ∇V oraz ∇F są równoległe. Czy to przypadek?

Rozważmy inną sytuację. Niech $V(x, y) = x - y^2$. Poszukamy maksymalnej i minimalnej wartości funkcji V na elipsie o równaniu $F(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0$. Z rysunku 2 wynika, że funkcja V osiąga maksimum w punktach A i B oraz minimum w punktach C i D. I znów we wszystkich tych punktach gradient funkcji V (kolorowe wektory) jest równoległy do gradientu funkcji F (czarne wektory)!

Może się też zdarzyć, że przyjdzie nam szukać ekstremów na powierzchni, która ma brzeg (na przykład na górnej połówce sfery wraz z równikiem). Wtedy trzeba osobno sprawdzać jeszcze sam brzeg (we wspomnianym przypadku równik).

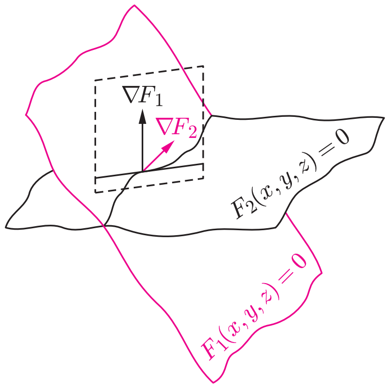


Rys. 2. Parabola $x - y^2 = -4\frac{1}{16}$ jest styczna do elipsy $x^2 + \frac{y^2}{2^2} - 1 = 0$ w punktach C i D. Wychodząc np. z punktu C i idąc po elipsie, trafimy do wartości funkcji V większych niż w C. Dlaczego?

Wszystkie nasze obserwacje prowadzą zatem do wniosku, że ekstremów funkcji V przy warunku $F(x,y,z)=0$ należy szukać wśród takich punktów, dla których

$$(*) \qquad \nabla V = \lambda \nabla F,$$

gdzie λ to pewna liczba rzeczywista, zwana mnożnikiem Lagrange'a. Wystarczy chwila zastanowienia, by zrozumieć, dlaczego tak jest. Otóż maksimum (lub minimum) funkcji V na powierzchni $F(x,y,z)=0$ (lub $F(x,y)=0$) może być osiągane tylko wtedy, gdy w każdym kierunku **stycznym do powierzchni** liniowy wzrost funkcji V znika. Innymi słowy, liniowy wzrost funkcji V może mieć tylko składową prostopadłą do powierzchni $F=0$, czyli równoległą do gradientu F.

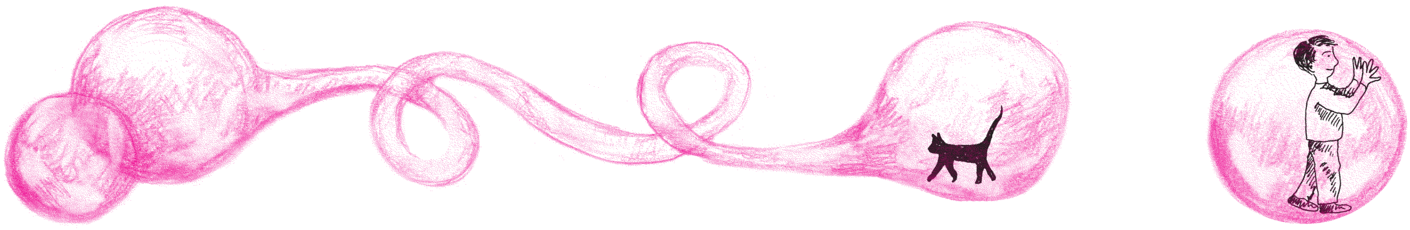


Rys. 3

No dobrze, ale dlaczego w tytule pojawiły się mnożniki, a nie mnożnik Lagrange'a? Nietrudno to wytłumaczyć: przecież możemy nałożyć więcej niż jeden warunek na poszukiwane punkty i szukać ekstremów wśród punktów (x,y,z), dla których $F_1(x,y,z)=0$ oraz $F_2(x,y,z)=0$ dla pewnych funkcji F_1 i F_2. Odpowiada to szukaniu ekstremów na przecięciu pewnych powierzchni. Spoglądając na rysunek 3, widzimy, że gradient funkcji V nie może mieć składowej stycznej do krzywej l, musi zatem leżeć w płaszczyźnie wyznaczonej przez gradient funkcji F_1 i gradient funkcji F_2. Innymi słowy, musi być ich liniową kombinacją, tzn.

$$(**) \qquad \nabla V = \lambda_1 \nabla F_1 + \lambda_2 \nabla F_2,$$

gdzie λ_1 i λ_2 to pewne liczby rzeczywiste zwane mnożnikami Lagrange'a. Czytelnik obdarzony n-wymiarową wyobraźnią (dla $n \geqslant 4$) z łatwością wskaże przykłady, gdy mnożników Lagrange'a potrzeba będzie jeszcze więcej.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

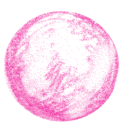
F 595. Oszacować czas zmniejszenia się o połowę ciśnienia powietrza wewnątrz sztucznego satelity Ziemi, mającego w ścianie otwór o średnicy rzędu 1 centymetra.
Rozwiązanie na str. 9

F 596. Ile ruchów pompki potrzeba do nadmuchania piłki futbolowej?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1024. Znaleźć największą wartość wyrażenia

$$xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)},$$



gdzie $-1 \leqslant x, y \leqslant 1$.
Rozwiązanie na str. 16

M 1025. Suma nieujemnych liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wynosi 1. Jaką maksymalną wartość może przyjąć

$$x_1 \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_3} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{x_n}\ ?$$

Rozwiązanie na str. 5

M 1026. Liczby $x_1, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ są dodatnie oraz $k<n$. Załóżmy, że liczby $x_{k+1}, \ldots, x_n$ są ustalone. Jak należy wybrać $x_1, \ldots, x_k$, by zminimalizować $\sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j}$?
Rozwiązanie na str. 5