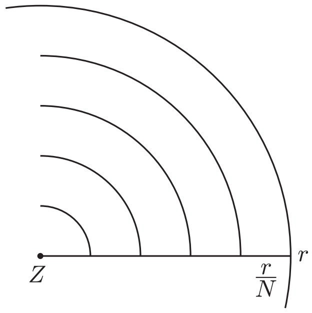
Pierścień Kaca

Krzysztof REJMER

Charakterystyczną cechą układów makroskopowych, złożonych z wielkiej liczby cząsteczek jest to, że zachodzą w nich procesy nieodwracalne, takie jak przepływ ciepła pomiędzy ciałami o różnych temperaturach. Dzieje się tak, mimo że prawa mechaniki klasycznej, rządzące ruchem cząsteczek, są odwracalne w czasie. Wprawdzie „natura” cząsteczek jest kwantowa, ale ich ruch pomiędzy zderzeniami można opisać klasycznie, o ile energia nie jest zbyt wysoka. Samo zderzenie cząsteczek należy opisywać prawami mechaniki kwantowej, ale jedyną wielkością, której potrzebujemy w analizie ich ruchu, jest tak zwany przekrój czynny na zderzenie, czyli – mówiąc niezbyt dokładnie – prawdopodobieństwo zderzenia. Najczęściej jednak traktujemy cząsteczki jako sztywne kule zderzające się sprężyście, bez wnikania w to, co dzieje się z nimi, gdy znajdą się bardzo blisko. Jeśli potraktujemy cząsteczki jako klasyczne sztywne kule, obliczenie przekroju czynnego na zderzenie jest zadaniem trywialnym. Sprzeczność między nieodwracalnością wielu fizycznych procesów a odwracalnością praw mechaniki klasycznej nosi nazwę **paradoksu Loschmita**. Co więcej, z twierdzenia Poincarégo o powrocie wynika, że dla prawie wszystkich stanów początkowych układ powróci w pobliże stanu początkowego, choć dla układów makroskopowych ten czas powrotu jest niesłychanie duży (większy niż czas życia Wszechświata). Porównanie konsekwencji twierdzenia Poincarégo z istnieniem procesów nieodwracalnych nazwano **paradoksem Zermelo**. Z obu paradoksów płynie wniosek, że nieodwracalności procesów w makroskopowych układach nie można wytłumaczyć w kategoriach czysto mechanicznych (niezbędne są pewne założenia o charakterze statystycznym), a poza tym nieodwracalność nie ma charakteru bezwzględnego, lecz związana jest z właściwą układowi skalą czasu. Należy wspomnieć, że twierdzenie Poincarégo dotyczy zachowawczych (izolowanych) układów mechanicznych, natomiast układy, z którymi mamy do czynienia w rzeczywistości, nie są izolowane, jednak nie tu tkwi istota rzeczy.

Rozwiązanie zadania F 615.
Rozważmy kulę o środku w źródle światła i promieniu r (rysunek).



Kulę dzielimy za pomocą współśrodkowch sfer na N części o jednakowej grubości $\frac{r}{N}$. W k-tej części, licząc od środka, znajduje się

$$m = \frac{4\pi k^2 n r^3}{N^3}$$

drobin pyłu, które zasłaniają powierzchnię mA, czyli $\frac{nA}{N}$ całości powierzchni sfery. Drobiny w różnych warstwach ustawione są przypadkowo i niezależnie od siebie, więc całkowita niezasłonięta powierzchnia to

$$\left(1 - \frac{nA}{N}\right)^N$$

całej sfery, co po przejściu do granicy $N \to \infty$ daje $e^{-r/nA}$. Po podzieleniu na jednostkę powierzchni otrzymujemy

$$I = \frac{I_0}{r^2}\, e^{-r/nA}.$$

Dążenie makroskopowego układu do stanu równowagi – co jest procesem nieodwracalnym – w przypadku rozrzedzonego gazu opisywane jest równaniem Boltzmanna. Jednak analiza zachowania się wielkiego zbioru cząsteczek poruszających się w trójwymiarowej przestrzeni jest niesłychanie trudna, dlatego uprościmy sobie zadanie i przedyskutujemy własności bardzo prostego modelu, mającego wszystkie interesujące nas własności, zaproponowanego przez Marka Kaca. Model ten został nazwany **pierścieniem Kaca**. Rozważymy zatem okrąg podzielony przez N punktów na N komórek, każda z nich zawiera kulkę białą lub czarną, założymy przy tym, że w stanie początkowym dominują kulki jednego koloru. W jednostkowych odstępach czasu każda z kulek przeskakuje do następnej komórki, umówmy się, że zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Pewna liczba punktów zawiera wskaźniki, które zmieniają kolor mijającej wskaźnik kulki. Przejście kulki przez znacznik jest tu odpowiednikiem zderzenia cząsteczek. Spodziewalibyśmy się, że układ dąży do stanu równowagi, w którym liczba białych kulek jest równa liczbie kulek czarnych.

Naszym celem jest znalezienie równań opisujących liczbę kulek białych $B(t)$ i czarnych $C(t)$ jako funkcji (dyskretnego, mierzonego liczbami naturalnymi) czasu t. Oznaczmy przez $b(t)$ i $c(t)$ liczby białych i czarnych kulek znajdujących się bezpośrednio przed znacznikami, a więc zmieniających kolor w najbliższym skoku.

Spełnione są równania

$$\begin{aligned} B(t+1) &= B(t) + c(t) - b(t), \\ C(t+1) &= C(t) + b(t) - c(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Oznaczmy przez Δ różnicę między liczbą białych i czarnych kulek. Spełnia ona równanie

$$\Delta(t+1) = \Delta(t) - 2[b(t) - c(t)]. \tag{2}$$

Jest to równanie wprawdzie ścisłe, ale zupełnie bezwartościowe, nie znamy bowiem rozkładu kulek przed znacznikami. Wprowadzimy do modelu pewne założenie statystyczne. Założymy mianowicie, że ułamek cząstek zmieniających barwę w danym kroku jest równy prawdopodobieństwu μ tego, że wybrany punkt dzielący okrąg na komórki jest znacznikiem. Prawdopodobieństwo to możemy zdefiniować jako stosunek liczby znaczników do liczby wszystkich punktów. A zatem

$$\frac{b(t)}{B(t)} = \frac{c(t)}{C(t)} = \mu. \tag{3}$$

Przy tym założeniu równanie (2) daje się sprowadzić do postaci

$$\Delta(t+1) = (1 - 2\mu)\Delta(t), \tag{4}$$

które można iterować t razy, aby otrzymać rozwiązanie w postaci

$$\Delta(t) = (1 - 2\mu)^t \Delta(0). \tag{5}$$

W nieciekawym przypadku $\mu = 1$, kiedy w każdym punkcie znajduje się znacznik, w każdym ruchu każda kulka zmienia kolor, a zatem obserwujemy oscylacje, $\Delta(t)$ zmienia jedynie znak, co także odzwierciedla wzór (5). Jednak gdy $\mu < 1$, rozwiązanie, które otrzymaliśmy, odpowiada znikającej różnicy ilości białych i czarnych kulek ($|\Delta(t)| \longrightarrow 0$), gdy t dąży do nieskończoności, co zgadza się z obserwowanym w przyrodzie dążeniem do stanu równowagi; takie zachowanie się układu nazwiemy boltzmannowskim. Z drugiej strony nasz wynik w oczywisty sposób jest błędny, ponieważ mamy

1. Paradoks Loschmita: równanie (4) i jego rozwiązanie (5) nie jest niezmiennicze względem odwrócenia czasu, podczas gdy dynamika układu jest odwracalna.

2. Paradoks Zermelo: w czasie $t = 2N$ każda z kulek dwukrotnie mija każdy znacznik, a więc układ musi wrócić do pierwotnego stanu (twierdzenie Poincarégo o powrocie).

Dokładniej rzecz biorąc, zarówno równanie (4), jak i rozwiązanie (5) wcale nie muszą być złe, jedynie zakres ich stosowalności jest ograniczony. Sprzeczność między nieodwracalnym charakterem obserwowanych zjawisk i odwracalnością dynamiki, jak również paradoksy Loschmita i Zermelo zostają rozwiązane, jeśli wprowadzimy zespół statystyczny i wykażemy, że równania (4, 5) opisują nie ściśle zachowanie się dowolnego układu w zespole, lecz najbardziej prawdopodobne zachowanie się jednego z układów tworzących zespół. Zespół statystyczny zdefiniujemy jako zbiór pierścieni Kaca o tym samym początkowym rozmieszczeniu kulek czarnych i białych, ale o różnych rozmieszczeniach tej samej liczby znaczników. Niech i oznacza numer punktu, natomiast ułamek układów mających znacznik w punkcie i jest równy μ. Stan mikroskopowy układu opiszemy następująco:

$\eta_i(t) = 1$, gdy w chwili t przed punktem i znajduje się biała kulka,
$\eta_i(t) = -1$, gdy w chwili t przed punktem i znajduje się czarna kulka,

$\epsilon_i = 1$, gdy w punkcie i nie ma znacznika,
$\epsilon_i = -1$, gdy w punkcie i znajduje się znacznik.

Posługując się tymi definicjami, możemy napisać

$$\Delta(t) = \sum_i \eta_i(t) \tag{6}$$

oraz

$$\eta_{i+1}(t+1) = \varepsilon_i \eta_i(t). \tag{7}$$

Możemy więc wyrazić Δ przez warunki początkowe

$$\eta_{i+1}(t+1) = \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \ldots \varepsilon_{i-t} \eta_{i-t}(0), \tag{8}$$

$$\Delta(t+1) = \sum_i \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \ldots \varepsilon_{i-t} \eta_{i-t}(0). \tag{9}$$

Odnotujmy, że $\Delta(2N) = \Delta(0)$, ponieważ po czasie $t = 2N$ każdy z epsilonów pojawia się dwukrotnie. Uśrednijmy to wyrażenie względem zespołu.

$$\langle \Delta(t) \rangle = \sum_i \langle \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \ldots \varepsilon_{i-t} \rangle \; \eta_{i-t}(0). \tag{10}$$

Po prawej stronie równania (10) mamy średnią iloczynu t kolejnych epsilonów. Średnia iloczynu epsilonów nie zależy od i, więc możemy wyciągnąć ją przed sumę, a że są to kolejne epsilony, możemy ponumerować je od 1 do t.

$$\langle \Delta(t) \rangle = \langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t \rangle \; \Delta(0). \tag{11}$$

Przedyskutujemy dwa przypadki, gdy t jest mniejsze i gdy jest większe niż N. Prawdopodobieństwo tego, że kulka mija j znaczników w t krokach, jest równe iloczynowi

$$\mu^j (1-\mu)^{t-j}$$

(jest to prawdopodobieństwo wystąpienia j znaczników w dowolnym układzie) przez

$$\frac{t!}{j!(t-j)!}$$

(jest to ilość możliwych rozmieszczeń j znaczników pośród t punktów). Dla j znaczników iloczyn epsilonów jest równy $(-1)^j$. Mamy zatem dla $t < N$

$$\langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_t \rangle = \sum_{j=1}^{t} (-1)^j \frac{t!}{j!(t-j)!} \mu^j (1-\mu)^{t-j} = (1-2\mu)^t. \tag{12}$$

(W oryginalnej pracy Kaca ta średnia obliczona jest w zupełnie inny, niezwykle pomysłowy, choć trudniejszy sposób.) Powyższa procedura jest poprawna pod warunkiem, że $t \ll N$. Duże wartości j w sumie (12) mogą być większe od ilości znaczników i takie składniki sumy fałszują wynik. Wynik, który otrzymaliśmy, natychmiast prowadzi do wniosku

$$\langle \Delta(t) \rangle = (1-2\mu)^t \Delta(0), \tag{13}$$

przy czym jest on prawdziwy, gdy t jest mniejsze nie tylko od N, lecz i od liczby znaczników. Jest to wynik zgodny z równaniem opartym na założeniu (3), tyle tylko, że opisuje on nie dokładne zachowanie się pojedynczego układu (z całego zespołu możliwych układów), lecz najbardziej prawdopodobne zachowanie się jednego z układów w zespole. Dla $N < t \leqslant 2N$ zapiszemy $t = N + s$

$$\langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{N+s} \rangle = \langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_N \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{N+s} \rangle = \langle \varepsilon_{s+1} \ldots \varepsilon_N \rangle = \langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{N-s} \rangle = \langle \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2N-t} \rangle, \tag{14}$$

gdzie najpierw pozbyliśmy się znaczników występujących dwukrotnie, a potem inaczej ponumerowaliśmy punkty. Dostajemy wynik taki sam jak poprzednio, tylko zamiast t mamy $2N - t$,

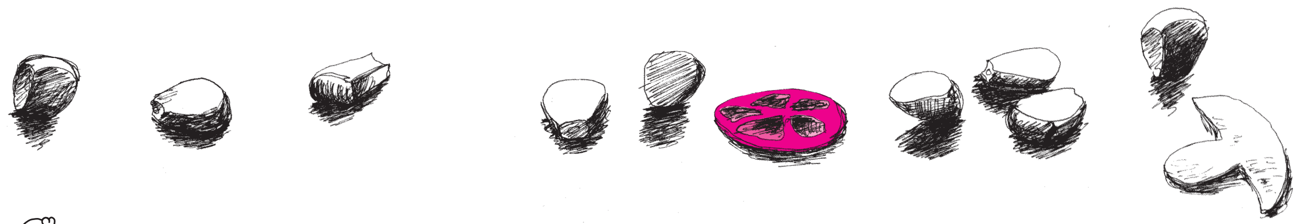
$$\langle \Delta(t) \rangle = (1-2\mu)^{2N-t} \Delta(0). \tag{15}$$

Wynik ten jest poprawny, gdy t jest bliskie wartości $2N$, z podobnych powodów jak w poprzednim przypadku. Gdy $t \longrightarrow 2N$, średnia po zespole dąży do wartości początkowej. Nazwiemy to antyboltzmannowskim zachowaniem się układu.

Wykazaliśmy zatem, że typowy układ będzie dążył do stanu równowagi, w którym liczba czarnych kulek jest równa liczbie białych kulek i że jest to typowe zachowanie się tylko w pewnej skali czasu. Co więcej, można wykazać, że odchylenie standardowe maleje wraz z N zgodnie z prawem

$$\left(\left\langle\left[\frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}-(1-2\mu)^t\right]^2\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\sim\frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{16}$$

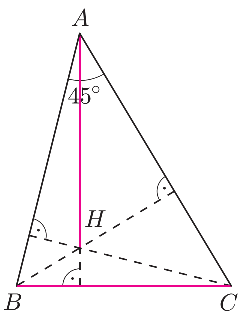
co oznacza, że w dużym zespole statystycznym większość układów zachowuje się (w odpowiedniej skali czasu) po boltzmannowsku. Nie wyklucza to faktu, że mogą istnieć w zespole także inne, bardzo szczególne układy, które zachowują się w sposób zupełnie inny niż średnie opisane powyżej, na przykład gdy znaczniki rozmieścimy na okręgu regularnie. Jeśli znacznik znajduje się w co drugim punkcie (wymaga to, by N było liczbą parzystą), to po dwóch skokach każda kulka dwukrotnie zmienia kolor, czyli układ wraca do stanu sprzed dwóch skoków, zachowując się periodycznie z okresem 2. Nie jest to ani boltzmannowskie, ani antyboltzmannowskie zachowanie się układu. Czytelnik bez trudu sam znajdzie inne przykłady. Jednak są to zawsze bardzo nieliczne w zespole układy. Zdecydowana większość układów zachowuje się w sposób bliski średniej.



Zadania

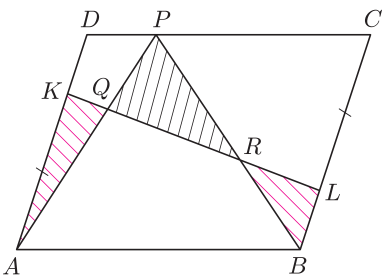
Redaguje Waldemar POMPE

M 1054. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 45°$.



Punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC. Wykazać, że $AH = BC$.
Rozwiązanie na str. 5

M 1055. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$, przy czym $AK = CL$.



Punkt P leży na odcinku CD. Prosta KL przecina odcinki AP i BP odpowiednio w punktach Q i R. Wykazać, że

$$[AKQ] + [BLR] = [PQR],$$

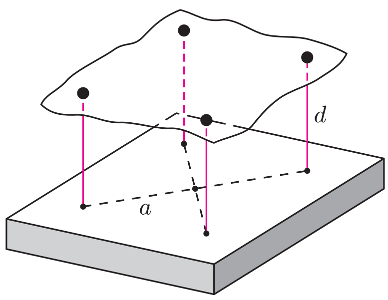
gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.
Rozwiązanie na str. 5

M 1056. Liczbę rzeczywistą dodatnią nazwiemy *szczęśliwą*, jeśli jej rozwinięcie dziesiętne nie zawiera po przecinku cyfr różnych od 1 lub 7. (Np. liczba $13,71717777\ldots$ jest szczęśliwa, a $77,07717171\ldots$ nie jest.) Wykazać, że każdą liczbę rzeczywistą większą od 1 można przedstawić w postaci sumy dziewięciu liczb szczęśliwych.
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 615. Natężenie światła w czystym powietrzu maleje według wzoru $I(r) = \dfrac{I_0}{r^2}$, gdzie r to odległość od źródła. Jak zmienia się ta zależność, gdy w powietrzu znajduje się pochłaniający światło pył o koncentracji n (liczbie drobin na jednostkę objętości) i polu powierzchni drobiny A?
Rozwiązanie na str. 6

F 616. Rozpatrzmy układ jak na rysunku.



Wiszącą płytę o masie $m = 3$ kg i momencie bezwładności $I = 0{,}1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$, $a = d = 0{,}5$ m, wprawiono w małe drgania poprzez skręcenie względem osi przechodzącej przez środek płyty. Obliczyć częstotliwość drgań.
Rozwiązanie na str. 16