

# Bifurkacje, czyli o wędrówkach punktów po płaszczyźnie

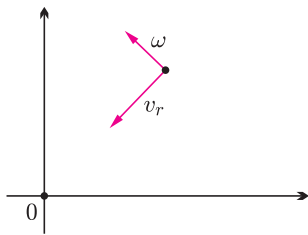
Witold SADOWSKI

Do opisu poszczególnych fragmentów rzeczywistości wystarcza nam czasem jedna liczba (np. stan pieniędzy na koncie), czasem kilka (np. ciśnienie, temperatura, wilgotność powietrza dla określenia pogody), a może się też zdarzyć, że i milion liczb to za mało (np. do określenia położenia i prędkości atomów gazu w słoiku). Tak czy inaczej stan opisywanego przez model matematyczny układu zazwyczaj reprezentowany jest przez  $n$  liczb rzeczywistych, czyli przez jakiś punkt w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , gdzie  $n$  może być bardzo duże, ale nie musi. Ponieważ opisywany układ ulega zwykle zmianie w czasie, więc jego historia to droga punktu w przestrzeni  $n$ -wymiarowej, zwanej przestrzenią stanów.

Interesować nas będzie pytanie, po jakich drogach mogą chodzić punkty? Nie będziemy przy tym rozpatrywać jakiegoś konkretnego modelu pewnego zjawiska i ograniczymy się do bardzo prostej sytuacji, gdy punkty wędrują po płaszczyźnie. Ruch punktu będzie zdeterminowany przez określenie prędkości, z jaką w danym miejscu ma się poruszać. Innymi słowy, w każdym punkcie płaszczyzny zaczepimy wektor-drogowskaz, tak że cała płaszczyzna pokryje się uczesanymi włoskami, z których utkana będzie droga punktu. To, jak ustawione są wektory-drogowskazy (a przez to i drogi punktów), zależy na ogół od jakiejś ustalonej reguły. Możemy np. założyć, że wszystkie punkty wirują wokół punktu  $(0,0)$  ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , a ich prędkość radialna (czyli ta wzdłuż promienia wodzącego, od początku układu współrzędnych do miejsca, w którym znajduje się wędrujący punkt),  $v_r$ , dana jest zależnością:

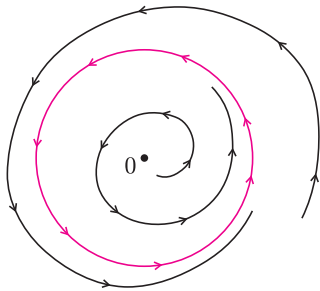
$$v_r = r(1 - r),$$

gdzie  $r$  – to promień wodzący (rys. 1).



Rys. 1

Widzimy, że  $v_r$  jest równe zero w początku układu współrzędnych i na okręgu  $x^2 + y^2 = 1$ . Ponadto dla  $0 < r < 1$  prędkość radialna jest dodatnia, czyli skierowana od punktu  $(0,0)$  do okręgu jednostkowego, dla  $r > 1$  jest ona ujemna, a zatem skierowana do początku układu współrzędnych. Otrzymujemy więc obraz dróg jak na rysunku 2.

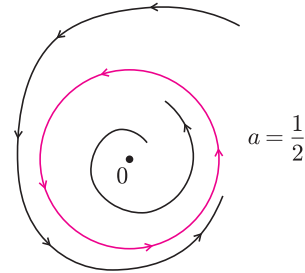


Rys. 2

Zastanówmy się, co by się zmieniło, gdyby prędkość wirowania punktów nadal była stała, ale prędkość radialna zmieniała się wedle reguły

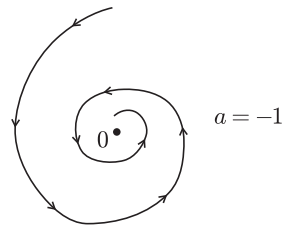
$$v_r = r(a - r),$$

gdzie  $a$  jest pewną ustaloną liczbą rzeczywistą. Dla  $a > 0$  obraz dróg nie ulega większej zmianie (rys. 3a),



Rys. 3a

ale dla  $a < 0$  wygląda całkiem inaczej: znika kołowa orbita wokół zera i wszystkie punkty zbiegają do punktu  $(0,0)$ , zupełnie tak jak woda w zlewie, gdy wyjąć korek (rys. 3b).



Rys. 3b

Możemy zatem na tę sytuację patrzeć następująco: startując z ujemnych wartości parametru  $a$ , mamy jeden ściek, do którego spływają wszystkie punkty. Gdy parametr  $a$  mija zero, rodzi się koło, które wciąga wszystkie punkty, a dotychczasowy ściek przestaje być ściekiem i zaczyna być źródłem. Mówimy, że w punkcie  $a = 0$  nastąpiła tzw. superkrytyczna bifurkacja Hopfa (ze stabilnego, tzn. przyciągającego okolice punkty ujścia, powstała stabilna orbita).

Nieco inną sytuację otrzymamy, gdy prędkość kątową nadal będzie stała, ale prędkość radialna zmieniać się będzie zgodnie z regułą:

$$v_r = r(-r^4 + r^2 + a).$$

Zbadajmy, kiedy prędkość  $v_r$  jest dodatnia, a kiedy ujemna. W tym celu znajdziemy pierwiastki wielomianu

$$-r^4 + r^2 + a.$$

Rozpatrzmy przypadki pod hasłem „be kwadrat minus cztery ace”.

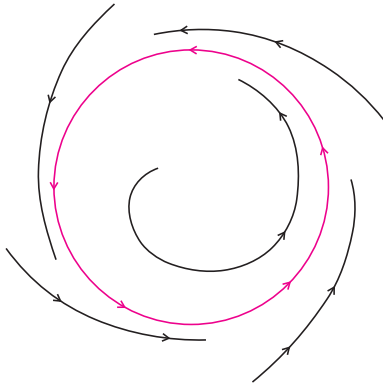
**Przypadek I:** Parametr  $a$  jest dodatni i wtedy zachodzi

$$\Delta = 1 + 4a > 1.$$

Mamy dwa miejsca zerowe, z czego jedno jest dodatnie

$$r_1 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}.$$

Widzimy, że prędkość  $v_r$  jest dodatnia dla  $r \in (0, r_1)$  oraz ujemna dla  $r \in (r_1, \infty)$ .



Rys. 4a

Przypadki  $a = 0$  oraz  $a = -1/4$  pozostawiamy do rozpatrzenia Czytelnikowi.

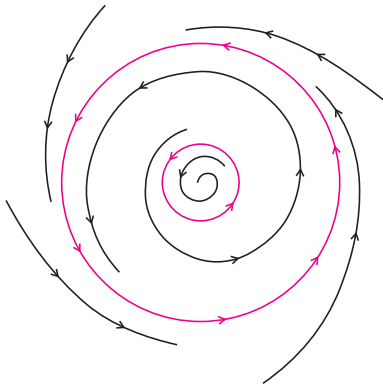
**Przypadek II:** Parametr  $a$  należy do przedziału  $(-1/4, 0)$  i wtedy spełniona jest nierówność

$$1 > \Delta = 1 + 4a > 0.$$

Mamy cztery miejsca zerowe, w tym dwa dodatnie

$$r_1 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}}.$$

Łatwo spostrzec, że prędkość  $v_r$  jest ujemna dla  $r \in (0, r_1) \cup (r_2, \infty)$  oraz dodatnia dla  $r \in (r_1, r_2)$ .

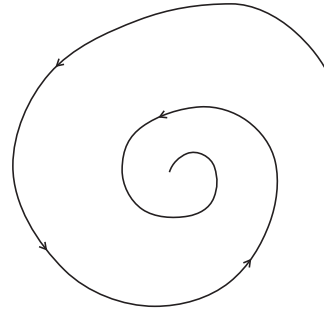


Rys. 4b

**Przypadek III:** Parametr  $a$  jest mniejszy od  $-1/4$  i wtedy zachodzi

$$\Delta = 1 + 4a < 0.$$

Badany wielomian przyjmuje tylko wartości ujemne. A zatem dla  $a < -1/4$  mamy  $v_r < 0$  dla każdego  $r > 0$ .



Rys. 4c

Wyniki tych elementarnych, choć chwilami nużących, rachunków streszczone są na rysunkach 4a, 4b oraz 4c.

Spróbujmy opowiedzieć przedstawioną na obrazkach historię. Początkowo, gdy parametr  $a$  był dodatni, wszystkie punkty (z wyjątkiem jednego; którego?) zasysało pewne koło o promieniu większym od 1. Gdy parametr  $a$  malał, malał też promień ssącego koła, aż w pewnej chwili parametr  $a$  osiągnął zero, promień ssącego koła stał się równy 1 i ze spokojnego dotąd punktu  $(0,0)$  wystartowało odpychające okoliczne punkty koło o małym promieniu. To, co działo się potem (gdy parametr  $a$  malał poniżej zera), łatwo sobie wyobrazić: dwa koła – ssące i odpychające – ruszyły naprzeciw siebie, aż w końcu, gdy parametr stał się równy  $-1/4$ , oba koła uderzyły w siebie i... znikły, zostawiając na placu boju jedynie zasysający wszystko początek układu współrzędnych.

Powstaje pytanie, czy opisane wyżej dramatyczne historie wędrówek punktów po płaszczyźnie mają jakikolwiek związek z rzeczywistością? Wielu sądzi, że tak. Przyroda wybiera bowiem zazwyczaj takie stany, w których osiągnięta jest pewna równowaga, co odpowiada obszarom w przestrzeni stanów, które zasysają okoliczne punkty. Wiedza o tym, jak takie obszary rodzą się i umierają, może mieć rozmaite zastosowania i są już tacy, którzy próbują użyć jej do opisu różnicowania się ubarwienia zwierząt, czy rozwoju zarodka. Czy jednak bifurkacje spełnią pokładane w nich nadzieje uczonych, pokaże dopiero przyszłość.



**Rozwiązanie zadania F 624.**

Ze wzoru Ciołkowskiego  $v_k = U \ln \left( \frac{M_s}{M_k} \right)$ , gdzie  $U$  to prędkość wylotowa gazów z dyszy rakiety,  $M_s$  to masa startowa wraz z paliwem,  $M_k$  – masa po zużyciu całego paliwa. W pierwszym przypadku mamy

$$v_1 = u \ln \left( \frac{2m_s}{2m_k} \right) = u \ln \left( \frac{m_s}{m_k} \right),$$

gdzie  $m_s$ ,  $m_k$  i  $u$  odnoszą się do pojedynczego silnika, w drugim musimy zsumować prędkości nadane przez oba silniki

$$v_2 = u \ln \left( \frac{2m_s}{m_s + m_k} \right) + u \ln \left( \frac{m_s}{m_k} \right) = u \ln \left( \frac{m_s}{m_k} \cdot \frac{2m_s}{m_s + m_k} \right) > v_1.$$

Wynik pokazuje, że „opłaca się” używać rakiet wielostopniowych, w których zużyte stopnie są odrzucane.



**Rozwiązanie zadania F 623.**

W analizie pominięto wpływ zbliżenia pojazdu na prędkość ciężkich ciał. Zmiana prędkości ich ruchu jest bardzo niewielka przy dużym stosunku masy ciał do masy pojazdu, lecz powoduje zmianę energii kinetycznej obu ciał. Pojazd przyspiesza więc kosztem energii ruchu ciężkich ciał.

Jest to bardzo uproszczony model mechanizmu wykorzystywanego do „wyrzucania” sond kosmicznych poza Układ Słoneczny przy pomocy grawitacji planet (np. *Voyager*).