Problem najlepszego wyboru

Jacek JAKUBOWSKI, Rafał SZTENCEL

Problem ten występuje w literaturze również jako problem wyboru sekretarki albo problem posagu. Jest zresztą wiele sytuacji, gdy musimy dokonać wyboru najlepszego spośród n pojawiających się po kolei obiektów, przy czym do odrzuconego obiektu nie można wrócić. Liczba n jest znana, obiektom możemy przypisać liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n$, wyrażające nasze preferencje (sekretarka) lub mierzalną cechę obiektu (posag). Liczb a_i nie znamy z góry, wiemy tylko, że są one wszystkie różne. W dalszym ciągu założymy, że $n \geqslant 3$, bowiem przypadek $n = 1$ nie jest interesujący, a gdy $n = 2$, jest wszystko jedno, jaką strategię wybierzemy.

Załóżmy, że ograniczamy się do następującej strategii (ograniczenie to nie jest w rzeczywistości istotne; dowód można znaleźć w [1]): oglądamy ustaloną z góry liczbę m obiektów, a potem wybieramy pierwszy z pozostałych lepszy od każdego z obejrzanych m obiektów. Jeśli nie doczekamy się takiego obiektu, zadowalamy się ostatnim. Nasuwają się dwa naturalne pytania, na które odpowiemy:

1. Jakie jest prawdopodobieństwo sukcesu przy danym m, jeśli za sukces uznamy wybór najlepszego obiektu?

2. Przy jakim m jest ono największe?

Obiekty, a zatem i przypisane im liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mogą pojawić się w dowolnej kolejności, tworząc permutację zbioru $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dlatego zbiór zdarzeń elementarnych Ω będzie składać się ze wszystkich takich permutacji. Przyjmiemy, że zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Przeprowadzając doświadczenie zapoznajemy się z permutacją zbioru A, czyli ciągiem $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, stopniowo. Dla dalszych rozważań kluczowe znaczenie ma następująca

Uwaga. Jeśli znamy już pierwszych k wyrazów powyższego ciągu i nazwiemy je w kolejności rosnącej $b_1, \ldots, b_k$ (a więc $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$), to następny wyraz wpada z równymi prawdopodobieństwami do każdego z $k + 1$ przedziałów:

$$(-\infty, b_1), (b_1, b_2), (b_2, b_3), \ldots, (b_k, \infty).$$

Istotnie, rozpatrzmy zdarzenie, polegające na tym, że $a_{i_{k+1}} \in (b_1, b_2)$. Jeśli zamienimy miejscami $a_{i_{k+1}}$ i b_2, to nowy wyraz (czyli b_2) wpadnie do następnego przedziału, którego lewym końcem jest teraz $a_{i_{k+1}}$. To nowe zdarzenie musi mieć jednak identyczne prawdopodobieństwo, bowiem zamiana miejsc dwóch wyrazów ciągu ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy zdarzeniami elementarnymi, tworzącymi rozpatrywane zdarzenia.

Powyższy argument (i całe zadanie) można przedstawić mniej formalnie: wyobraźmy sobie, że jest n kandydatów do ręki Alicji, którzy po kolei oświadczają się. Alicja tworzy na bieżąco listę rankingową, przypisując kandydatom liczby a_i. Załóżmy teraz, że Bernard i Bolesław już zdążyli się oświadczyć, zostali odrzuceni, i na razie zajmują (niestety) pozycję ostatnią i przedostatnią wśród k znanych Alicji kandydatów. Następny w kolejce jest Arnold, który ma pewne szanse, że znajdzie się między Bernardem a Bolesławem. Załóżmy, że tak właśnie się zdarzyło.

Gdyby Arnold i Bolesław zamienili się przedtem miejscami w kolejce, to teraz Bolesław zastanawiałby się, jaka jest szansa, że znajdzie się między Bernardem i Arnoldem – ale nie trafiłby tam, zająłby bowiem, wyprzedziwszy Arnolda, pozycję trzecią od końca. Jasne jest, że pierwsze zdarzenie zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy po zamianie miejsc zachodzi drugie. Składają się one z tej samej liczby zdarzeń elementarnych (ciągów), a zamiana miejsc Arnolda z Bolesławem ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy ciągami tworzącymi oba zdarzenia.

Udowodniliśmy więc, że nowy kandydat ma takie same szanse na drugie i trzecie (od końca) miejsce na liście. Podobne rozumowanie pokazuje, że są takie same szanse na pierwsze i drugie, trzecie i czwarte, etc.

Niech teraz B_k będzie zdarzeniem „wybrano k-ty z kolei obiekt”, gdzie $k = m+1, m+2, \ldots, n$. Wykażemy, że

$$P(B_k) = \frac{m}{k(k-1)}.$$

Dla dowodu zauważmy, że bezpośrednio z Uwagi wynika, że $P(B_{m+1}) = \frac{1}{m+1}$, bowiem $(m+1)$-szy obiekt okazał się lepszy od m poprzednich. Jeśli nie zaszło B_{m+1}, to – znów zgodnie z Uwagą – prawdopodobieństwo warunkowe zajścia B_{m+2} jest równe $\frac{1}{m+2}$. Zatem wzór na prawdopodobieństwo całkowite daje:

$$P(B_{m+2}) = P(B_{m+2}|B_{m+1}) \cdot P(B_{m+1}) + P(B_{m+2}|B'_{m+1}) \cdot P(B'_{m+1}) =$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} \cdot \frac{m}{m+1} = \frac{m}{(m+1)(m+2)}.$$

Łatwe rachunki pokazują, że i dalej wszystko się zgadza. Zdarzenia $B_{m+1}, \ldots, B_n$ wykluczają się wzajemnie, a w sumie dają cały zbiór Ω. Dlatego możemy jeszcze raz zastosować wzór na prawdopodobieństwo całkowite w celu wyznaczenia prawdopodobieństwa zdarzenia S_m, czyli sukcesu:

$$P(S_m) = \sum_{k=m+1}^{n} P(S_m|B_k) \cdot P(B_k) = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{k(k-1)} =$$
$$= \frac{m}{n} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k-1} = \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k},$$

gdy tylko dowiemy się, że $P(S_m|B_k) = \frac{k}{n}$. Aby to wykazać, zobaczymy (znów korzystając z Uwagi), jakie szanse utrzymania najwyższej pozycji miałby k-ty obiekt, gdybyśmy zdecydowali się obejrzeć je wszystkie. Wtedy obiekt o numerze $k+1$ nie mógłby przewyższyć k-tego, czyli wpaść do ostatniego przedziału: (a_{i_k}, ∞), więc musiałby wpaść do jednego z pozostałych k przedziałów, podobnie obiekt o numerze $k+2$ do jednego z $k+1$ przedziałów (znów: do każdego, z wyjątkiem ostatniego), itd. Ostatecznie

$$P(S_m|B_k) = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Odpowiedzieliśmy tym samym na pierwsze pytanie, teraz zajmiemy się drugim. Oznaczymy $P(S_m) = p_m$ i zbadamy różnice $p_m - p_{m-1}$:

$$p_m - p_{m-1} = \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{m-1}{n} \sum_{k=m-1}^{n-1} \frac{1}{k} =$$
$$= \frac{m}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{m-1}{n} \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{m-1}{n} \cdot \frac{1}{m-1} = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k} - 1 \right].$$

Zauważmy, że żadna z różnic nie jest równa zeru, gdy $n \geqslant 3$ (dlaczego?), zatem tylko jeden wyraz ciągu (p_m) osiąga maksimum, i jest ono wyznaczone przez warunki

(1) $$\frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} < 1,$$

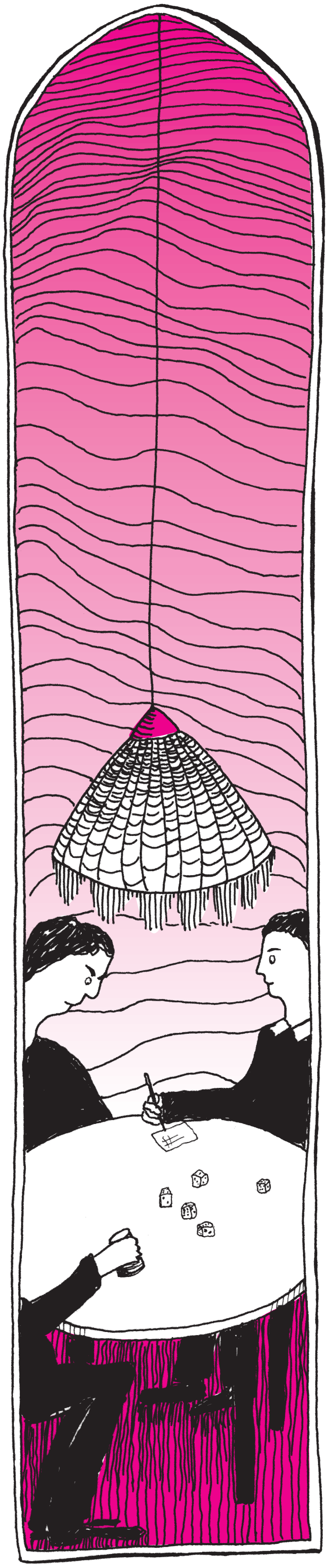
(2) $$\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{n-1} > 1,$$

równoważne stwierdzeniu, że $p_m - p_{m-1}$ jest ostatnią dodatnią różnicą.
Jeśli na przykład $n = 10$, to

(3) $$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 0{,}996 < 1$$

(4) $$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = 1{,}329 > 1,$$

zatem $m = 3$, a prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $p_{10} = \frac{3}{10} \cdot 1{,}329 = 0{,}399$.



Wyprowadzimy teraz przybliżenia dla m i p_m przy dużych n.

1. Jak wiadomo, $\ln(1+x) \leqslant x$, gdy $x > -1$. Wynika stąd, że $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$. Warunek (1) daje

$$\ln\left(\frac{m+2}{m+1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \leqslant \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} < 1,$$

czyli

$$\ln\left(\frac{m+2}{m+1} \cdot \frac{m+3}{m+2} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-1}\right) < 1,$$

wobec tego

$$\frac{n}{m+1} < \mathrm{e},$$

czyli

$$n - \mathrm{e} < m\mathrm{e}. \qquad (5)$$

2. Jeśli $1 > x > 0$, to $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 2x$ (obie funkcje przyjmują w zerze wartość zero, i wystarczy porównać tempo wzrostu obu stron, czyli pochodne). Podstawiając $x = \frac{1}{2n}$ otrzymujemy

$$\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}.$$

Z warunku (2) wynika teraz, że

$$\ln\left(\frac{2m+1}{2m-1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{2n-1}{2n-3}\right) > \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{n-1} > 1,$$

czyli

$$\ln\left(\frac{2m+1}{2m-1} \cdot \frac{2m+3}{2m+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-3}\right) > 1,$$

co daje

$$\frac{2n-1}{2m-1} > \mathrm{e},$$

czyli

$$n + \frac{\mathrm{e}-1}{2} > m\mathrm{e}. \qquad (6)$$

3. Nierówności (5) i (6) po podzieleniu przez e dają

$$\frac{n}{\mathrm{e}} - 1 < m < \frac{n}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}},$$

co pozwala na szybkie wyznaczenie m z błędem nie przekraczającym jedności, jako że w przedziale o długości $\frac{3}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}}$ są co najwyżej dwie liczby całkowite. Niestety, nie ma szans na proste wzory w rodzaju $m = [\frac{n+1}{\mathrm{e}}]$, ten akurat jest prawdziwy co najmniej dla $n \leqslant 25$, ale z wyjątkiem $n = 10$.

W dalszym ciągu m wyznaczone z warunków (1) i (2) będziemy oznaczać przez m_n, żeby podkreślić zależność od n.

4. Łatwo obliczyć granicę prawdopodobieństwa sukcesu przy strategii optymalnej, gdy $n \to \infty$: z (1) i (2) wynika, że $\frac{1}{m_n} + \ldots + \frac{1}{n-1}$ różni się od jedności co najwyżej o $\frac{1}{m_n}$, a ponadto

$$\frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{n} < \frac{m_n}{n} < \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n\mathrm{e}},$$

wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} \sum_{k=m_n}^{n-1} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Jak się zdaje, większość ludzi stosuje w przypadku konieczności wyboru opisaną wyżej strategię, przyjmując $m = 1$. Dla niedużych n wybór „pierwszego lepszego od pierwszego" jest całkiem niezły, co powinno być jasne w świetle udowodnionych zależności.

[1] E. B. Dynkin, A. A. Juszkiewicz, *Twierdzenia i problemy procesów Markowa*, PWN, Warszawa 1970, rozdz. III, §1.