Muchy na kloszu

Rozważmy następujące zadanie. Trzy muchy usiadły, oczywiście losowo, na szklanym kulistym kloszu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wszystkie znajdują się na tej samej półkuli klosza? Oczywiście wynosi ono 1, gdyż 3 punkty na sferze zawsze znajdują się na jednej półsferze, co jest łatwym zadaniem z geometrii. Zadanie staje się trudniejsze, gdy muchy są cztery. Rozważmy zatem następujący problem.

Zadanie. Na sferze losowo rozmieszczono n punktów ($n = 1, 2\ldots$). Ile jest równe prawdopodobieństwo tego, że wszystkie punkty leżą na jednej półsferze?

Oto rozwiązanie. Losowy wybór n punktów na sferze jest równoważny następującej operacji. Najpierw losowo wybieramy n kół wielkich na sferze, po czym dla każdego z tych kół wielkich losujemy jedną z dwóch półsfer przez nie wyznaczonych. Bieguny tych półsfer to n losowo wybranych punktów na sferze. Zamiast więc losować punkty losowaliśmy półsfery. To, że punkty leżą na jednej półsferze, jest równoważne temu, że wszystkie wylosowane punkty są wyznaczone przez półsfery o niepustym przecięciu. Przy ustalonych n kołach wielkich liczba możliwych wyborów półsfer przez nie wyznaczonych to 2^n, każdemu kołu wielkiemu odpowiadają 2 półsfery. Pytanie jest następujące: ile spośród tych 2^n wyborów sfer ma niepuste przecięcie? Równoważnie możemy zapytać o to, ile jest różnych zbiorów na sferze będących przecięciami n półsfer o ustalonych kołach wielkich. Otóż tyle, na ile kawałków owe koła wielkie dzielą sferę. Pozostaje zatem jedynie zliczyć te kawałki. Zauważamy, że są to ściany wielościanu krzywoliniowego (w razie potrzeby łatwo zastępowalnego zwyczajnym wielościanem) na sferze. Wystarczy więc wyznaczyć liczbę krawędzi i wierzchołków tego wielościanu i zastosować wzór Eulera. Każde koło wielkie przecina pozostałe $n-1$ kół wielkich w $2(n-1)$ punktach, a każdy wierzchołek wielościanu jest przecięciem dokładnie dwóch kół wielkich, zatem wielościan ma $\frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$ wierzchołków. Z kolei owe $2(n-1)$ punktów przecięcia koła wielkiego z pozostałymi dzieli to koło wielkie na $2(n-1)$ łuków. Wszystkich łuków w ten sposób otrzymanych dla wszystkich kół wielkich jest więc $2n(n-1)$. Szukana liczba ścian S może być zatem wyznaczona z równania $S - 2n(n-1) + n(n-1) = 2$, czyli ze wzoru Eulera. Otrzymujemy stąd $S = n^2 - n + 2$. Szukane prawdopodobieństwo wynosi zatem $\frac{n^2-n+2}{2^n}$. Równie interesujący jest problem dla sfer wyżej wymiarowych, co pozostawiamy Czytelnikowi do kontemplacji.

Krzysztof PAWŁOWICZ

Zliczanie kropek i galaktyk

Nawiasy $\langle\rangle$ oznaczają średnią.

Po poznaniu natury galaktyk wyłonił się problem, jak są one rozmieszczone w przestrzeni. Z samego oglądu zdjęć nieba wynikało, że bardzo nierównomiernie – obecność gromad galaktyk rzucała się w oczy. Warto jednak byłoby mieć jakąś obiektywną miarę tej nierównomierności rozkładu galaktyk. Nietrudno zgadnąć, jak taką miarę skonstruować.

Podzielmy symboliczne zdjęcie nieba na k jednakowych kratek i rzućmy na taki obszar losowo N galaktyk, czyli kropek. Prawdopodobieństwo tego, że dana kropka znajdzie się w wybranej kratce, wynosi $p = 1/k$, a że wpadnie tam n wybranych kropek – oczywiście p^n. Z kolei prawdopodobieństwo tego, że pozostałe $N-n$ kropek znajdzie się w pozostałych kratkach wynosi $(1-p)^{N-n}$. Taki rozkład można zrealizować na tyle sposobów, na ile sposobów spośród N obiektów można wybrać n, ostatecznie więc prawdopodobieństwo $P(n)$ tego, że w wybranej kratce znajdzie się dowolne n galaktyk, opisuje rozkład Bernoulliego

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Statystyka podaje, że rozrzut liczby kropek w kratce, przy ich losowym rzucaniu na zdjęcie, wynosi $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$. Stwierdzenie więc, czy galaktyki grupują się, czy – przeciwnie – ich rozkład jest bardziej wygładzony od rozkładu przypadkowego, sprowadza się do obliczenia rozrzutu ich liczby w kratce na podstawie obserwacji: $\sigma_{obs} = \sqrt{\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2}$ i porównaniu z σ.

Obserwowany rozkład galaktyk wykazuje rzeczywiście rozrzut większy niż przewidywany przy rozkładzie losowym, zatem galaktyki grupują się. Nie jest to jedyna metoda badania rozkładu galaktyk, za to najprostsza. Dostrzegamy zapewne, że nasuwają się problemy w rodzaju: jak wynik obserwacji zależy od rozmiaru kratek, jakie znaczenie ma ograniczoność zdjęcia nieba, jak przełożyć rozkład galaktyk na zdjęciu na informację o ich rozkładzie w trzech wymiarach itd. Do uzyskania odpowiedzi na te pytania potrzebne są jednak metody bardziej wyrafinowane, a więc trudniejsze rachunkowo.

Tomasz KWAST