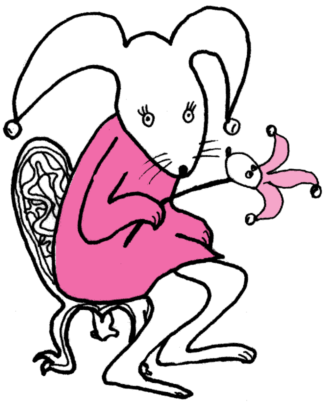
Dookoła nierówności Hilberta

Krzysztof OLESZKIEWICZ *



O nierówności Hilberta napisano już wiele. Trudno byłoby w krótkim artykule rzetelnie opisać jej zastosowania i rozmaite warianty, zwłaszcza że zwykle wymaga to użycia dość skomplikowanych narzędzi matematyki wyższej; przyjrzymy się więc z bliska tylko niektórym, wybranym zagadnieniom. Zainteresowany Czytelnik zechce może przeczytać obszerniejsze, przeglądowe opracowanie [1].

Nierówność Hilberta. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_l$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych $c_1, c_2, \ldots, c_k$, $d_1, d_2, \ldots, d_l \geqslant 1$, takich że $|c_i - c_j| \geqslant 1$ i $|d_i - d_j| \geqslant 1$ dla $i \neq j$, spełniona jest nierówność

$$\left|\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}\frac{a_m b_n}{c_m + d_n}\right| \leqslant \pi \cdot \left(\sum_{m=1}^{k} a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{l} b_n^2\right)^{1/2}.$$

W dowodzie nierówności Hilberta wykorzystamy nierówność Buniakowskiego–Schwarza, w wersji znanej już Cauchy'emu (dalej będziemy ją nazywać, jak to jest dość powszechnie przyjęte, nierównością Schwarza). Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_N$, $y_1, y_2, \ldots, y_N$ mamy

$$\left|\sum_{j=1}^{N} x_j y_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{N} y_j^2\right)^{1/2}.$$

Istotnie, jeśli na ciągach $t = (t_1, t_2, \ldots, t_N)$ i $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ określimy wzorem

$$t \circ u = \sum_{j=1}^{N} t_j u_j$$

działanie dwuargumentowe o wartościach rzeczywistych, to łatwo sprawdzić, że spełnia ono dla dowolnych ciągów t, u, v i dowolnej liczby rzeczywistej α następujące warunki:

$$t \circ u = u \circ t, \quad (\alpha t) \circ u = \alpha(t \circ u), \quad t \circ (u + v) = (t \circ u) + (t \circ v), \quad t \circ t \geqslant 0,$$

przy czym $t \circ t = 0$ tylko wtedy, gdy t jest ciągiem zerowym. Działanie mające powyższe własności nazywamy rzeczywistym iloczynem skalarnym. Proste przekształcenia pokazują, że

$$(x \circ x)\alpha^2 + 2(x \circ y)\alpha + (y \circ y) = (\alpha x + y) \circ (\alpha x + y) \geqslant 0$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej α, a więc wyróżnik $\Delta = 4(x \circ y)^2 - 4(x \circ x)(y \circ y)$ jest niedodatni, stąd zaś natychmiast wynika, że $|x \circ y| \leqslant (x \circ x)^{1/2}(y \circ y)^{1/2}$, co jest po prostu inną formą zapisu nierówności Schwarza.

Wróćmy do nierówności Hilberta. Bez straty ogólności możemy założyć, że $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ i $d_1 < d_2 < \ldots < d_l$ – wystarczy bowiem przenumerować wyrazy ciągu (c_m) tak, by ustawić je w kolejności rosnącej i to samo przenumerowanie zastosować do wyrazów ciągu (a_m), aby otrzymać nierówność równoważną wyjściowej; podobnie rzecz się ma z ciągami (d_n) i (b_n). Wygodnie będzie też przyjąć, że $c_0 = d_0 = 0$. Niech $N = k \cdot l$ i potraktujmy sumę podwójną $\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}$ jako sumę N składników. Wówczas, stosując nierówność Schwarza do

$$x_{m,n} = c_m^{1/4}(c_m + d_n)^{-1/2} d_n^{-1/4} a_m \quad \text{i} \quad y_{m,n} = d_n^{1/4}(c_m + d_n)^{-1/2} c_m^{-1/4} b_n,$$

otrzymamy

$$\left|\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l}\frac{a_m b_n}{c_m + d_n}\right| = \left|\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l} x_{m,n} y_{m,n}\right| \leqslant \left(\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l} x_{m,n}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l} y_{m,n}^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{k} a_m^2 \sum_{n=1}^{l}\frac{\sqrt{c_m}}{(c_m + d_n)\sqrt{d_n}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{l} b_n^2 \sum_{m=1}^{k}\frac{\sqrt{d_n}}{(c_m + d_n)\sqrt{c_m}}\right)^{1/2},$$

nierówność Hilberta wynika więc natychmiast z następującego lematu.

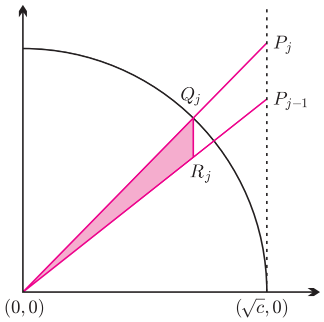
Rozwiązanie zadania F 656. Przyjmijmy szerokość rury jako a i wysokość jako b, tak, jak w poprzednim zadaniu. Strumień cieczy tłoczonej z prędkością v wynosi $\Phi = \rho abv$, a więc moc potrzebna do jego tłoczenia to $P = \rho abvgh$. Podstawiając do wzoru na moc skuteczną z poprzedniego zadania, dostajemy warunek

$$\rho abvgh = \sigma labB^2\left(\frac{U}{aB} - v\right)v,$$

czyli

$$v = \frac{U}{aB} - \frac{\rho gh}{\sigma lB^2}.$$

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski



Lemat. Dla każdego $c>0$ i dowolnych liczb rzeczywistych $d_0=0, d_1, \ldots, d_l$, takich że $d_j \geqslant d_{j-1}+1$ dla $j=1,2,\ldots,l$, spełniona jest nierówność

$$\sum_{n=1}^{l} \frac{\sqrt{c}}{(c+d_n)\sqrt{d_n}} < \pi.$$

Lemat udowodnimy geometrycznie. Rozważmy w kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie dodatnią ćwiartkę okręgu o promieniu $\sqrt{c}$ i środku $O=(0,0)$. Na prostej $x=\sqrt{c}$ wybieramy punkty $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_l$ tak, by punkt P_j miał współrzędne $(\sqrt{c}, \sqrt{d_j})$ dla $j=0,1,2,\ldots,l$, a przez Q_j oznaczamy punkt przecięcia okręgu z odcinkiem OP_j. Niech R_j oznacza punkt wspólny odcinka OP_{j-1} i pionowej prostej przechodzącej przez Q_j. Łatwo zauważyć, że trójkąt OQ_jR_j jest obrazem trójkąta OP_jP_{j-1} w jednokładności o skali $\lambda = |OQ_j|/|OP_j| = \sqrt{c}/\sqrt{c+d_j}$. Zatem

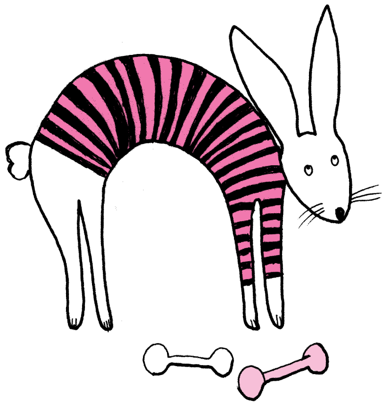
$$S_{\Delta OQ_jR_j} = \lambda^2 S_{\Delta OP_jP_{j-1}} = \lambda^2 \cdot |P_jP_{j-1}| \cdot |OP_0|/2 = \frac{c}{c+d_j} \cdot \frac{(\sqrt{d_j}-\sqrt{d_{j-1}})\sqrt{c}}{2} =$$

$$= \frac{c\sqrt{c}(d_j-d_{j-1})}{2(c+d_j)(\sqrt{d_j}+\sqrt{d_{j-1}})} \geqslant \frac{c\sqrt{c}}{4(c+d_j)\sqrt{d_j}},$$

z drugiej zaś strony oczywiście

$$\sum_{j=1}^{l} S_{\Delta OQ_jR_j} < \pi(\sqrt{c})^2/4 = \pi c/4,$$

bo trójkąty te mają parami rozłączne wnętrza i wszystkie zawierają się w rozpatrywanej ćwiartce koła. Skracając o czynnik $c/4$ obie strony oszacowania, kończymy dowód lematu i nierówności Hilberta.



Najczęściej rozważa się ciągi $c_m=m$, $d_n=n$ i wówczas nierówność Hilberta przyjmuje postać

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{l} \frac{a_m b_n}{m+n} \leqslant \pi \left(\sum_{m=1}^{k} a_m^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{l} b_n^2\right)^{1/2}.$$

Nawet w tym szczególnym przypadku stałej π nie da się zastąpić żadną mniejszą liczbą, jeśli nierówność ma być prawdziwa dla dowolnych k, l oraz ciągów (a_m) i (b_n). Wystarczy rozważyć ciągi dane wzorami $a_m = 1/\sqrt{m}$ i $b_n = 1/\sqrt{n}$, przy $k, l \to \infty$. Dociekliwy Czytelnik z pewnością zdoła wymyślić dowód geometryczny podobny do przedstawionego powyżej (tym razem trzeba skonstruować trójkąty **pokrywające** jedną ósmą koła) – można też znaleźć go w artykule [2].

Inna ciekawa nierówność, pokrewna nierówności Hilberta, mówi, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_k$ i $c_1, c_2, \ldots, c_k > 0$ mamy

$$\sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} \frac{a_m a_n}{c_m + c_n} \geqslant 0.$$

Istotnie, gdy rozważymy funkcję zmiennej nieujemnej s daną wzorem

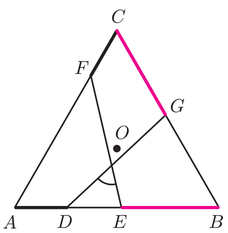
$$Q(s) = \sum_{m=1}^{k}\sum_{n=1}^{k} \frac{a_m a_n}{c_m + c_n} s^{c_m+c_n},$$

łatwo sprawdzimy, iż dla $s>0$

$$Q'(s) = s^{-1}\left(\sum_{m=1}^{k} a_m s^{c_m}\right)^2 \geqslant 0,$$

że zaś $Q(0)=0$, mamy stąd $Q(1) \geqslant 0$, co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 1114.
Obróćmy trójkąt ABC wokół jego środka O o kąt $120°$ tak, aby punkt C przeszedł na punkt A.



Wówczas punkt F przejdzie na punkt D, a punkt E na punkt G. Zatem odcinek FE przejdzie na odcinek DG. Stąd wynika, że kąt między prostymi DG i EF wynosi $60°$.

Literatura

[1] J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities,* Cambridge University Press and the Mathematical Association of America, Cambridge UK and Washington DC, 2004 (rozdział 10).

[2] K. Oleszkiewicz, *An Elementary Proof of Hilbert's Inequality,* Amer. Math. Monthly 100 (1993), 276–280.