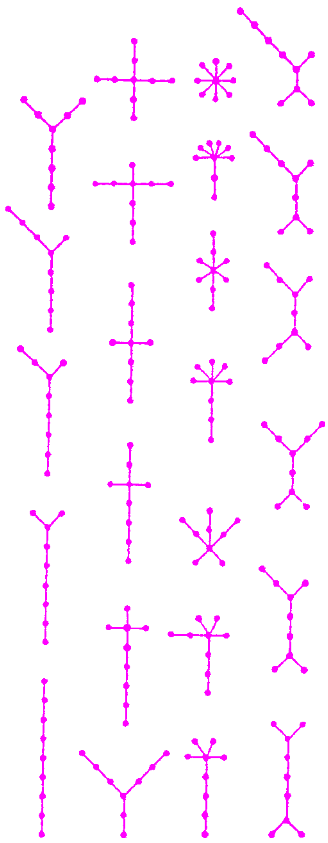


drzewka z dziewięcioma wierzchołkami – początek

O pożytkach z trójkąta Pascala

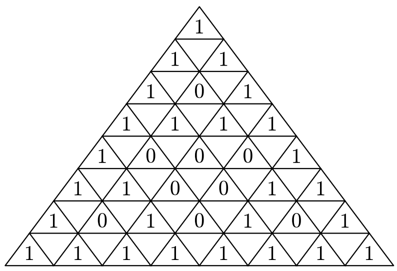
Trójkąt Pascala to, jak wiadomo, „nieskończony trójkąt", na którego bokach stoją jedynki, a każda z pozostałych liczb jest sumą dwóch nad nią położonych.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
. . . .

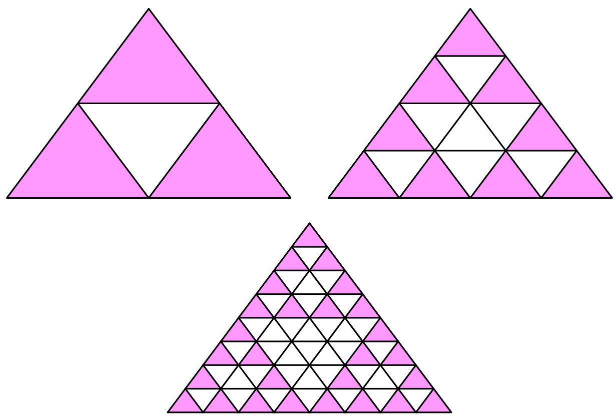
Trójkąt taki buduje się zwykle po to, by poznać współczynniki dwumianu Newtona $(a+b)^n$, ale można go użyć i w innych celach. Takim właśnie – nieco przekornym – wykorzystaniem trójkąta Pascala zajmiemy się poniżej.

Jak z trójkąta Pascala zrobić sobie sitko?

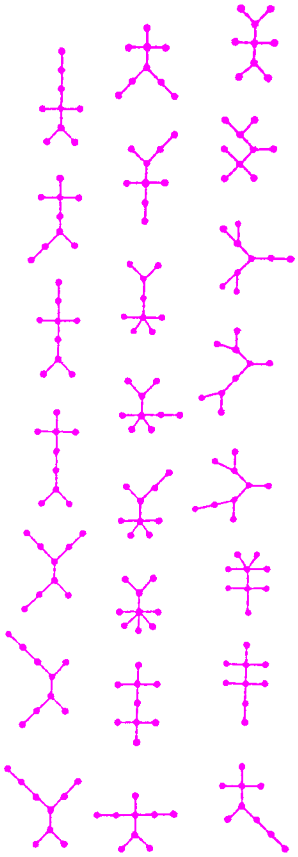
Narysujmy trójkąt Pascala na siatce złożonej z trójkącików, tak jak na rysunku poniżej. Następnie każdą liczbę parzystą zastąpmy zerem, a każdą liczbę nieparzystą – jedynką.



Rozważmy teraz trójkąty złożone z dwóch, czterech, ośmiu, szesnastu, itd. pięter i zamalujmy w nich jakimś kolorem trójkąty, w których widnieje jedynka. Po odpowiednim przeskalowaniu otrzymamy ciąg figur, jak na rysunku poniżej.



Widać, że pierwsza figura powstaje w wyniku podziału danego trójkąta na cztery identyczne trójkąty i wycięcia środkowego trójkąta. Druga


drzewka z dziewięcioma wierzchołkami – dokończenie; jest ich 47

przez zastosowanie identycznej procedury do każdego z trójkątów pozostałych po pierwszej wycinance, itd. Kolorowa figura, jaka pozostaje po nieskończenie wielu cięciach, to sitko (czyli krzywa trójkątowa) Sierpińskiego. W trójkącie Pascala przedstawione są zatem kolejne etapy tworzenia takiego sitka.

Tajemnice zapisu binarnego

Opisany wyżej związek trójkąta Pascala z geometrią nie jest związkiem jedynym. Aby się o tym przekonać, spójrzmy na „zero-jedynkowy” trójkąt Pascala i wypiszmy liczby z kolejnych pięter, traktując je jako liczby zapisane w układzie dwójkowym. Mamy wtedy (poczynając od drugiego rzędu)

$$[11]_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 2 + 1 = 3$$

$$[101]_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 4 + 1 = 5$$

$$[1111]_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$$

$$[10001]_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 1 = 17$$

$$[110011]_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 2 + 1 = 51$$

Liczby te na pozór mogą zdawać się nieco przypadkowe. Kiedy jednak zauważymy, że

$$2^{2^0} + 1 = 3, \qquad 2^{2^1} + 1 = 5, \qquad 2^{2^2} + 1 = 17$$

oraz

$$15 = 3 \cdot 5, \qquad 51 = 3 \cdot 17,$$

to niewątpliwie zrodzi się w nas słuszna hipoteza, że powstające w ten sposób liczby są iloczynami tzw. liczb Fermata, tzn. liczb postaci

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Fermat sądził, że wszystkie takie liczby są pierwsze. Nie jest to jednak prawda. Dla $n = 0, 1, 2, 3, 4$ liczby Fermata rzeczywiście są pierwsze, ale już

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$$

liczbą pierwszą nie jest (udowodnił to Euler). Do dziś poszukujemy liczb pierwszych Fermata różnych od F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, ale – jak dotąd – bezowocnie. Tymczasem jest to ważne zagadnienie właśnie z punktu widzenia geometrii. Słynne twierdzenie Gaussa wiąże bowiem liczby Fermata z konstruowalnością wielokątów foremnych.

Twierdzenie. Wielokąt foremny o n bokach da się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków
- $n = 2^k$, gdzie $k = 2, 3, 4, \ldots$,
- n jest iloczynem różnych liczb pierwszych Fermata,
- n jest iloczynem pewnej potęgi dwójki i różnych liczb pierwszych Fermata.

Okazuje się, że z trójkąta Pascala możemy odczytać wszystkie konstruowalne n-kąty foremne o nieparzystej liczbie boków. Jak to jednak możliwe, że trójkąt Pascala „zna się na geometrii”?

Pozostawiając to filozoficzne pytanie bez odpowiedzi, polecamy upewnienie się, że początkowe piętra trójkąta Pascala rzeczywiście kodują iloczyny parami różnych liczb pierwszych Fermata oraz stwierdzenie, do którego piętra zasada ta obowiązuje.

Małą Deltę przygotował Witold SADOWSKI