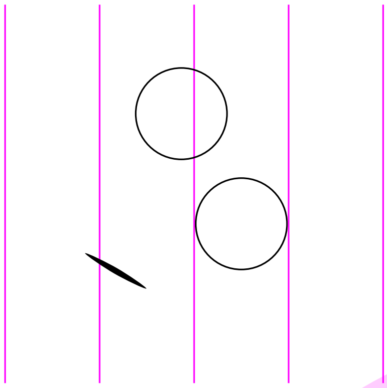
O igle Buffona nieco inaczej

Rafał SZTENCEL

Georges Louis Leclerc, hrabia de Buffon (1707–1788) jest dziś znany głównie za sprawą następującego zadania [4] o igle:



Jaka jest szansa, że igła o długości l, upuszczona na papier poliniowany prostymi równoległymi, poprowadzonymi w równych odstępach d, przetnie jedną z linii? Dla wygody zakładamy, że $l \leqslant d$.

Każdy, kto wykłada rachunek prawdopodobieństwa, ma po pewnym czasie dość standardowego rozwiązania. Niestety, nie każdy wie, że w niespełna 100 lat od sformułowania zadania znaleziono ([2], ostatnio opublikowane w [1]) rozwiązanie niewymagające tzw. prawdopodobieństwa geometrycznego, całek, itp.

Oto ono. Jeśli $l \leqslant d$, to możliwe jest co najwyżej jedno przecięcie linii igłą. Dlatego prawdopodobieństwo p przecięcia jest równe $1 \cdot p + 0 \cdot (1-p)$, czyli średniej liczbie przecięć. Ale średnia zależy liniowo od długości igły. Żeby to zobaczyć, oznaczmy przez $e(l)$ średnią liczbę przecięć, spowodowaną przez igłę o długości l. Jeśli igłę podzielimy na odcinki o długościach x i y, to oczywiście

$$e(x+y) = e(x) + e(y), \quad x, y \geqslant 0.$$

Z tego równania funkcyjnego otrzymamy bez trudu $e(nx) = ne(x)$ dla n naturalnych, a następnie z zależności

$$me\left(\frac{n}{m}x\right) = e\left(m\frac{n}{m}x\right) = e(nx) = ne(x), \quad m, n \in \mathbb{N}$$

wyniknie, że $e(rx) = re(x)$ dla r dodatnich i wymiernych. Ponieważ ponadto e jest niemalejąca, więc jest liniowa, czyli $e(tx) = te(x)$ dla wszystkich $t \geqslant 0$. W szczególności $e(x) = e(1)x = cx$, i wystarczy wyznaczyć c.

Dowód tego faktu nie jest trudny, nie jest też całkiem oczywisty.

W tym celu zauważmy, że igła nie musi być wcale prosta, by powyższa argumentacja miała sens. Igła w kształcie okręgu o średnicy d zawsze (no, prawie zawsze) przecina linie w dokładnie dwóch punktach. Zatem

$$2 = e(d\pi) = cd\pi,$$

skąd $c = 2/\pi d$. Zatem $p = e(l) = \frac{2l}{\pi d}$.

Wynik ten sugeruje, że liczbę π można by wyznaczać doświadczalnie. W 1901 roku Lazzarini rzucił patyczkiem 3408 razy, uzyskując 1808 przecięć, co przy $\frac{l}{d} = \frac{5}{6}$ dało

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3408}{1808} = 3{,}1415929\ldots$$

Taka dokładność jest mocno podejrzana, tym bardziej że $2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3408}{1808} = \frac{355}{113}$, i rozpoznajemy klasyczne przybliżenie π.

Niezależnie od tego rodzaju głupich żartów nieodpowiedzialnych uczonych Buffon może być uważany za prekursora tak zwanych metod Monte Carlo, czyli metod probabilistycznego szacowania wielkości, których analityczne wyznaczenie byłoby trudne, jeśli nie niemożliwe. Ostatnio w ten sposób wycenia się na przykład tzw. opcje egzotyczne – są to instrumenty finansowe, których sam opis jest zniechęcający.

Buffon próbował stosować argumentację probabilistyczną, by uzasadnić, że Układ Słoneczny powstał za sprawą jednej przyczyny. Miało być nią zderzenie Słońca z kometą. W tym celu szacował prawdopodobieństwo, że losowo puszczone w ruch planety będą krążyć wokół Słońca w tym samym kierunku i prawie w tej samej płaszczyźnie.

Propagował także pogląd, że prawdopodobieństwa rzędu 0,0001 należy uważać za zerowe, ponieważ każdy zdrowy 56-letni człowiek jest głęboko przekonany, że przeżyje jeszcze 24 godziny, choć – zgodnie z ówczesnymi statystykami – szansa zgonu 56-latka w ciągu doby była równa 0,0001. Obecnie jest ona (dla 56-letnich mężczyzn) dwukrotnie mniejsza [3].

Literatura

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Dowody z księgi*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2002.

[2] E. Barbier, *Note sur le problème d'aiguille et le jeu du joint couvert*, J. Math. Pures et Appliquées (2) **5** (1860), ss. 273–286.

[3] B. Błaszczyszyn, T. Rolski, *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT, Warszawa 2004

[4] G. L. Leclerc, Comte de Buffon, *Essai d'arithmétique morale*, dod. do „Histoire naturelle générale et particulière", vol. IV, 1777