Nieparzyste liczby doskonałe

Władysław NARKIEWICZ *

Liczbami doskonałymi nazywamy od czasów Pitagorasa takie liczby naturalne, które są równe sumie swoich dzielników właściwych. Tak więc liczba 6 jest doskonała z uwagi na równość $1 + 2 + 3 = 6$. Od dawna bezskutecznie poszukiwano nieparzystych liczb doskonałych i przypuszcza się, że ich nie ma. Pierwszy nietrywialny rezultat o takich liczbach pochodzi od Kartezjusza, który w 1638 r. odkrył, że muszą one mieć postać pa^2, gdzie p jest liczbą pierwszą, dającą resztę 1 z dzielenia przez 4, natomiast a jest liczbą naturalną. Stąd nietrudno wyprowadzić, że prawdopodobieństwo tego, iż n jest nieparzystą liczbą doskonałą, jest równe zeru. Oznacza to, że jeśli przez $D(x)$ oznaczymy ilość nieparzystych liczb doskonałych mniejszych od x, to

$$\lim_{x\to\infty} \frac{D(x)}{x} = 0.$$

Obecnie wiemy, że przy odpowiednio dobranej liczbie B zachodzi nierówność

$$D(x) \leqslant Be^{f(x)},$$

gdzie

$$f(x) = \frac{\log x \log\log\log x}{\log\log x},$$

a zatem $D(x)$ nie może rosnąć szybciej niż dowolna potęga x o wykładniku dodatnim. Przypuszcza się, oczywiście, że $D(x) = 0$.

Znanych jest szereg warunków, które musi spełniać nieparzysta liczba doskonała. Jeden z pierwszych takich warunków podał B. Peirce w 1832 roku, który pokazał, że taka liczba musi mieć co najmniej 4 różne dzielniki pierwsze. Dzisiaj wiemy, że takich dzielników musi być co najmniej 9 (G.L. Cohen, 1980), a przynajmniej jeden z nich musi być większy od 10^8 (T. Goto, Y. Ohno, 2006). Wiadomo także, że jeśli

$$n = \prod_p p^{c_p}$$

jest kanonicznym rozkładem takiej liczby, to $\sum_p c_p \geqslant 37$ (D.E. Iannucci, R.M. Sorli, 2003).

Wiemy także, że nie ma nieparzystej liczby doskonałej mającej mniej niż 300 cyfr w zapisie dziesiętnym. (R.P. Brent, G.L. Cohen i H.J.J. te Riele, 1991). Obecnie duży zespół stara się podnieść tę granicę do 10^{500} (szczegóły na stronie internetowej `www.oddperfect.org`).

W 1913 roku L. Dickson udowodnił, że może istnieć jedynie skończenie wiele liczb doskonałych mających zadaną liczbę dzielników pierwszych. Prosty dowód tego faktu podał w 1949 H.N. Shapiro. Dowód ten znaleźć można w mojej książce o klasycznych problemach teorii liczb (*Classical Problems in Number Theory*, PWN 1986). W 2003 roku P.P. Nielsen pokazał, że jeśli n jest nieparzystą liczbą doskonałą o k różnych dzielnikach pierwszych, to

$$n < 2^{4^k}.$$

Jak widzimy, o nieparzystych liczbach doskonałych niewiele wiadomo i niewiele osób zajmuje się na serio tym problemem. Wynika to zarówno z trudności zagadnienia, jak i z tego, że jest ono bardzo słabo powiązane z resztą matematyki.

*Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski

Rozwiązanie zadania F 706.
Przyjmijmy, że przekrój fajki S jest równy około $5\,\mathrm{cm}^2$, objętość V płuc wysportowanego człowieka około $5\,\mathrm{l}$, czas t trwania wydechu $5\,\mathrm{s}$. Otrzymujemy wtedy $v \approx V/St \approx 2\,\mathrm{m/s}$.