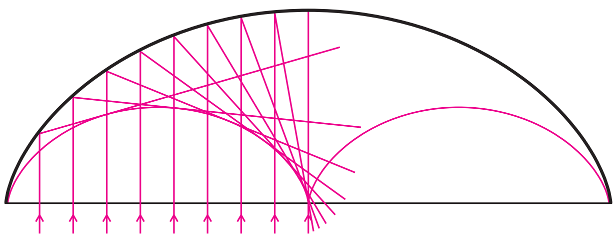
Kaustyka (dokładniej: katakaustyka) cykloidy to cykloida, a nawet dwie

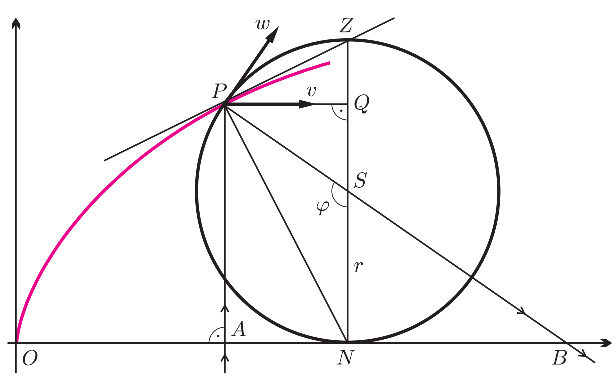
Wyjaśnijmy nazwy. Wiązka promieni równoległych, padająca na jakiś układ optyczny, z reguły przestaje być wiązką równoległą. Gdy tak się stanie, obwiednia owej wychodzącej wiązki to *kaustyka*; gdy promienie w tym układzie optycznym uległy odbiciu, jest to *katakaustyka*, a gdy uległy załamaniu – *diakaustyka*. I jeszcze: *obwiednia* rodziny krzywych (w tym przypadku promieni światła) to krzywa styczna do każdej z nich.



Powyżej jest narysowane kilka promieni równoległych odbijających się od większej cykloidy – ich obwiednią są dwie dokładnie dwa razy mniejsze cykloidy. Aby nie zagmatwać rysunku, są narysowane tylko odbicia od lewej połówki. Jeśli uda się dowieść, że tak jest rzeczywiście, wykażemy, że

katakaustyką cykloidy są dwie dwukrotnie mniejsze cykloidy.

Warto przypomnieć definicję i podstawowe własności cykloidy. Cykloida to tor ustalonego punktu okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej. Jej początkowy łuk został na rysunku zaznaczony kolorem, ale na razie nie zwracajmy na niego uwagi.



Zajmijmy się okręgiem i wyróżnionymi punktami i prostymi. Mamy, oczywiście, $PS = ZS = NS = r$. Ponieważ trójkąty PNS i PZS są równoramienne, a kąt NPZ jest prosty, więc

$$\sphericalangle SNP = \sphericalangle SPN = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$$

i

(1) $$\sphericalangle SPZ = \sphericalangle SZP = \frac{\varphi}{2}.$$

Z równoległości AP i NZ wynika, że $\sphericalangle APN = \sphericalangle SPN$.

Wniosek 1. PN jest dwusieczną kąta APS.

Zauważmy jeszcze, że (z trójkąta PQZ) mamy

(2) $$\sphericalangle QPZ = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}.$$

Teraz przejdźmy do cykloidy. Skoro ruch jest bez poślizgu, to przebyty odcinek prostej jest równy „przewiniętemu" łukowi okręgu, czyli $ON = \widehat{PN} = r\varphi$. Wynika stąd, że traktując kąt, o który obrócił się okrąg, jako parametr, mamy

(3) $$\begin{aligned} P &= (ON - PQ;\ NS + SQ) = \\ &= \left(\widehat{PN} - PS\sin(\pi-\varphi);\ NS + PS\cos(\pi-\varphi)\right) = \\ &= (r\varphi - r\sin\varphi;\ r - r\cos\varphi). \end{aligned}$$

Jeśli wektory v i w oznaczają odpowiednio prędkość ruchu postępowego wzdłuż prostej i prędkość ruchu obrotowego wokół środka okręgu, to brak poślizgu oznacza, że są one takiej samej długości. Styczna do powstającej cykloidy ma kierunek ich wypadkowej. Zatem (jako przekątna rombu) tworzy z nimi jednakowe kąty. Zauważmy, że wektor w jest styczny do okręgu, a więc prostopadły do jego promienia, stąd kąt między nim i PZ jest równy (patrz (2))

$$\frac{\pi}{2} - \sphericalangle SPZ = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \sphericalangle QPZ.$$

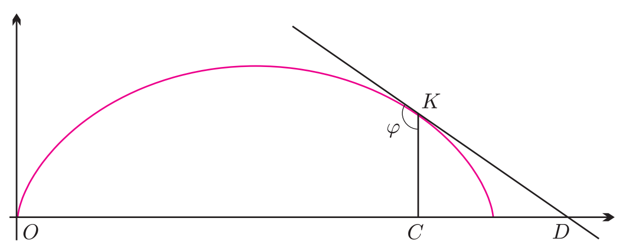
Zatem PZ jest dwusieczną kąta między wektorami v i w.

Wniosek 2. PZ jest styczną do cykloidy w punkcie p, a więc PN jest normalną w tym punkcie.

Teraz możemy już przejść do odbicia promieni padających na cykloidę pionowo do góry. Wniosek 1 i wniosek 2 stwierdzają, że promień odbity przechodzi przez środek okręgu wyznaczającego punkt odbicia. Zatem promień odbity w punkcie odpowiadającym kątowi φ przecina proste pionowe pod takim samym kątem. Obliczmy, w jakim punkcie B przecina on podstawę cykloidy.

(4) $$OB = ON + NB = r\varphi + r\,\mathrm{tg}\,(\pi - \varphi) = r\varphi - r\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Aby sprawdzić hipotezę, że promień odbity jest styczny do dwukrotnie mniejszej cykloidy (czyli danej przez okrąg o promieniu $\frac{1}{2}r$), narysujmy jej styczną równoległą do promienia odbitego PS.



Ponieważ styczna tworzy z prostą pionową kąt o połowę mniejszy od kąta wyznaczającego dany punkt cykloidy (patrz (1)), więc będzie to styczna odpowiadająca kątowi obrotu okręgu równemu 2φ. Zatem (patrz (3))

$$K = \left(\frac{r}{2}\cdot 2\varphi - \frac{r}{2}\sin 2\varphi;\ \frac{r}{2} - \frac{r}{2}\cos 2\varphi\right).$$

Teraz sprawdźmy, w jakim punkcie D ta styczna przecina podstawę cykloidy. Gdyby się okazało, że $OD = OB$ (patrz (4)), znaczyłoby to, iż $D = B$ i prosta DK jest prostą SB, czyli promieniem odbitym.

$$\begin{aligned} OD &= OC + CD = OC + CK\,\mathrm{tg}\sphericalangle CKD = \\ &= \frac{r}{2}\cdot 2\varphi - \frac{r}{2}\sin 2\varphi + \left(\frac{r}{2} - \frac{r}{2}\cos 2\varphi\right)\mathrm{tg}\,(\pi - \varphi) = \\ &= r\varphi - \frac{r}{2}\sin 2\varphi - \frac{r}{2}(1 - \cos 2\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi = \\ &= r\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi - \frac{r}{2}(2 - 2\cos^2\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi = \\ &= r\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi - r\,\mathrm{tg}\,\varphi + r\cos^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi = r\varphi - r\,\mathrm{tg}\,\varphi. \end{aligned}$$

Tak więc katakaustyką cykloidy są dwie mniejsze cykloidy.

M.K.