

# Fatamorgana w miniaturze

Maciej LISICKI\*

\*student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

## Rozterki słonecznego dnia

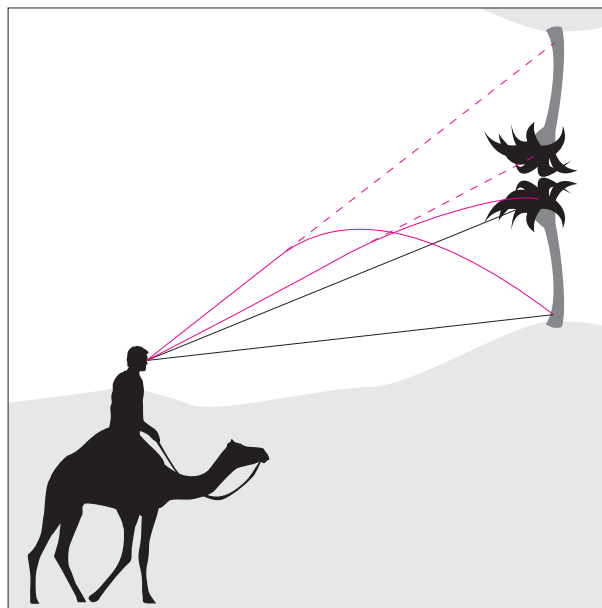
Fatamorgana, zwana też mirażem, jest zjawiskiem bardzo powszechnym, nie tylko na pustyniach, ale również w wielu innych miejscach. Wystarczy tylko słoneczny dzień i stosunkowo słaby wiatr, by obserwować miraż na drogach, dachach samochodów, a nawet na domowych parapetach.

Ogólnie fatamorganą nazywamy zjawisko ugięcia promieni światła w niejednorodnym optycznie ośrodku. W ciepły dzień słońce nagrzewa podłoże do temperatury znacznie wyższej niż powietrze nad nimi. W konsekwencji oddają one ciepło warstwom powietrza, które nagrzewają się niejednorodnie (cieplejsze są warstwy niższe). Zmiana temperatury warstwy powietrza wiąże się ze zmianą jej właściwości optycznych, w szczególności współczynnika załamania. Otrzymujemy ośrodek, w którym występuje pewien rozkład współczynnika załamania (aby ten rozkład był stabilny, ważny jest brak wiatru). Najłatwiej jest ten efekt zaobserwować nad asfaltowymi drogami, szczególnie podczas podjeżdżania pod górkę. Możemy wówczas zaobserwować efekt „mokrej jezdni”: wydaje nam się, że jezdnia daleko przed nami jest pokryta wodą, w której odbija się niebo.

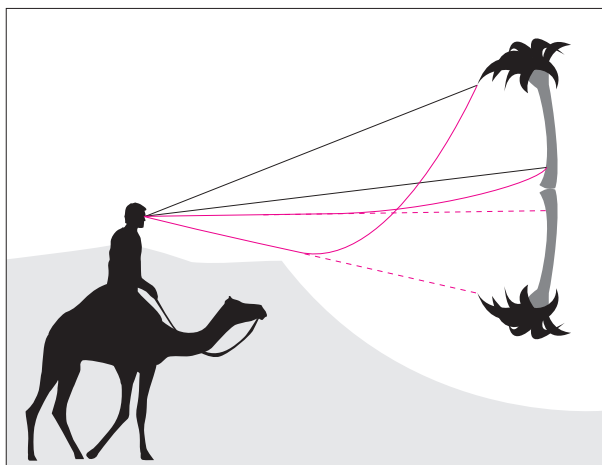
## Miraż i fatamorgana

Zjawisko fatamorgany możemy wyjaśnić za pomocą zakrzywionego biegu promieni świetlnych. Światło od odległego obiektu może wtedy docierać do nas więcej niż jedną drogą. Obserwator dostrzega wtedy dodatkowy obraz (obrazy) dalekiego planu, przy czym w zależności od rozkładu temperatury można mieć do czynienia z różnymi odmianami tego zjawiska. Dodatkowy obraz powstaje pod lub nad rzeczywistym obiektem.

Możemy podzielić wszystkie obserwowane miraży ze względu na położenie obrazu na górne, dolne i właśnie fatamorgany. Bieg promieni w każdym przypadku jest inny, bo inny jest rozkład współczynnika załamania. Gdy współczynnik załamania maleje z wysokością, jak np. nad powierzchnią mórz albo jezior lub czasami na pustyni, obserwujemy miraż górny (ang. *exterior mirage*; rys. 1). W przypadku, gdy współczynnik załamania rośnie z wysokością, co jest najczęściej spotykaną sytuacją (np. na drogach, pustyniach), obserwujemy miraż dolny (ang. *inferior mirage*; rys. 2). Gdy z kolei zależność współczynnika załamania od wysokości jest dana bardziej skomplikowaną zależnością, obserwujemy fatamorganę, czyli miraż złożony, tworzący wielokrotne, zmienne obrazy.



Rys. 1. Bieg promieni świetlnych w mirażu górnym. Szerokość kątowna obrazów jest mocno zwiększona w celu poprawienia czytelności rysunku.



Rys. 2. Bieg promieni świetlnych w mirażu dolnym. Szerokość kątowna obrazów jest mocno zwiększona w celu poprawienia czytelności rysunku.

## Światło w optycznie niejednorodnych ośrodkach

Zobaczymy, jak rozchodzi się światło w takich niejednorodnych ośrodkach. Na początek podzielimy ośrodek na  $k$  poziomych warstw, potem dokonamy przejścia  $k \rightarrow \infty$ . Warstwy mają różne temperatury  $T_i$ , a zatem różne współczynniki załamania  $n_i$ . Rozpatrzmy przejście promienia światła z warstwy  $i$ -tej do  $(i + 1)$ -ej padającego na granicę warstw pod kątem  $\alpha_i$ , a załamane pod kątem  $\alpha_{i+1}$ . Możemy napisać dla tego załamania równanie:

$$n_i \sin \alpha_i = n_{i+1} \sin \alpha_{i+1}.$$

Możemy napisać podobne równanie dla każdego przejścia między dwiema warstwami, a stąd otrzymujemy wielkość stałą dla każdego załamania:

$$n \sin \alpha = \text{const.}$$

Czyli, chociaż współczynnik załamania zmienia się wraz z wysokością, to iloczyn  $n \cdot \sin \alpha$  dla każdej trajektorii promienia światła pozostaje stały. Jeśli teraz będziemy dążyli do zera z grubością warstw (czyli do nieskończoności z ich liczbą), otrzymamy krzywoliniową trajektorię promienia światła. W takim ośrodku współczynnik załamania będzie funkcją wysokości, tj.  $n = n(y)$ . Niech teraz  $n(y) \sin \alpha = m$ , gdzie  $m$  jest stałą. Jej sens fizyczny jest następujący – jest to wartość współczynnika załamania w punktach, w których  $\sin \alpha = 1$ , czyli promień jest równoległy do osi poziomej. Na skutek niejednorodności część światła będzie nadal biegła po zakrzywionej trajektorii. W mirażu dolnym i większości miraży górnych promienie zmieniają przy tym kolejność. Dlatego obserwując miraż, mamy wrażenie oglądania obrazu odbitego od lustrzanej powierzchni.

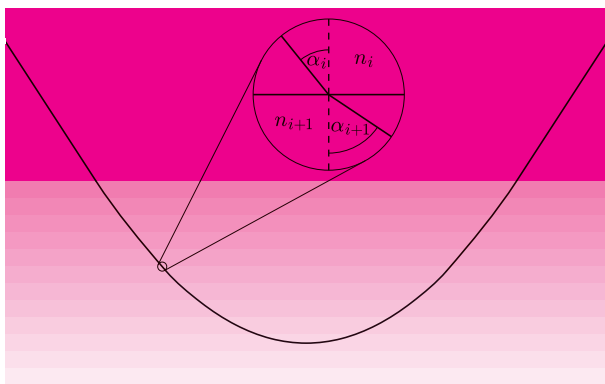
Spróbujemy opisać kształt trajektorii promienia świetlnego, przechodzącego przez ośrodek, w którym współczynnik opisany jest pewną funkcją wysokości. Ścisłej mówiąc, będziemy szukać kształtu krzywej  $y = y(x)$ . Oczywiście mamy geometryczną zależność (jak na rysunku 3):

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Jednocześnie  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$  oraz  $\sin \alpha = \frac{m}{n(y)}$ . Stąd otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{m}{\sqrt{n^2(y) - m^2}}.$$

Jeśli zatem będziemy mieli dany rozkład współczynnika załamania z wysokością, bez trudu lub z dużym trudem (zależnie od stopnia jego skomplikowania) znajdziemy trajektorię promienia świetlnego w ośrodku. Dla  $n(y) = n_0$  tor będzie, oczywiście, prostą.



Rys. 3. Tor promienia świetlnego, wpadającego pod kątem  $\alpha$  do niejednorodnego ośrodka. Zaznaczono również przykładowe granice warstw, na których promień świetlny załamuje się.

Problemem pozostaje dla nas określenie, jak zależy współczynnik załamania od wysokości. Jakościowe rozważania doprowadzają nas do wniosku, że im wyższa jest temperatura powietrza, tym niższa jest jego gęstość i tym niższy współczynnik załamania. Przedstawione powyżej rozumowanie daje szerokie pole do popisu dla twórców symulacji komputerowych, których wyniki mogą być imponujące, a przy tym stanowią ważne narzędzie do badania toru promieni świetlnych dla

różnych rozkładów współczynnika. Znacomity przykład Czytelnik może znaleźć w pracy, której autor modeluje miraży widziane nad powierzchnią morza, śledząc tor promieni dla różnych rozkładów temperatury powietrza [3].

## Na podbój krainy miraży, czyli zabawy doświadczalne

Istnieje bardzo prosty sposób pokazania zakrzywionej trajektorii promienia świetlnego w optycznie niejednorodnym ośrodku. Wystarczy w tym celu na dno akwarium wypełnionego wodą (bez ryb!) wsypać znaczną ilość soli kuchennej i pozostawić na kilka dni. W akwarium wytworzy się roztwór o stężeniu soli zależnym od wysokości nad dnem. Konsekwencje możemy zobaczyć, przepuszczając promień lasera przez roztwór (zdjęcie 1 na okładce). Zjawisko to jest nadzwyczaj widowiskowe, a wręcz zadziwiające – światło rozchodzi się po krzywych!

Do demonstracji zjawiska mirażu w powietrzu w pełnej krasie potrzebny jest, niestety, cięższy sprzęt. Można jednak najpierw użyć prostego układu doświadczalnego, który pozwoli zauważyć realny efekt. Wystarczy podgrzać płytę aluminiową lub stalową na kuchence gazowej. W naszym przypadku płytka miała wymiary  $20 \times 20$  cm i grubość 0,5 cm (zdjęcie 2 na okładce). Ważne jest, by płytka była odpowiednio gruba, aby nie ulegała deformacji. Powierzchnię płytki pokryliśmy piaskiem kwarcowym, aby uniknąć odbić światła od powierzchni metalu i zapewnić w miarę jednorodne nagrzanie naszej „pustyni”. Następnie podgrzewaliśmy płytę palnikiem gazowym. Otrzymany obraz pokazuje jednak tylko główną cechę zjawiska mirażu, tzn. powstawanie dodatkowych obrazów obserwowanych przedmiotów (zdjęcie 3 na okładce).

Przyszedł czas na wspomniany wcześniej ciężki sprzęt. Do stworzenia sztucznej pustyni wykorzystujemy płytę aluminiową o wymiarach  $200 \times 50$  cm i grubości 3 mm. Pokryliśmy ją piaskiem kwarcowym. Do obserwacji zjawiska przy tak małych odległościach płyta musiała być dokładnie wypoziomowana (u nas za pomocą 8 statywów), a piasek wygładzony. Następnie podgrzewaliśmy układ za pomocą palników gazowych (zdjęcie 4 na okładce).

Stosunkowo szybko dało się zaobserwować efekt mirażu (zdjęcia 5 i 6 na okładce). Pomiędzy piaskiem a górami na horyzoncie wytworzyła się warstwa, w której odbijały się góry. Warstwa ta działa jak powierzchnia cieczy, np. jeziora, w którym odbijają się nadbrzeżne góry. Stąd efekt mirażu jest tak zwodniczy na pustyniach. Oczywiście, w naszym eksperymencie mamy do czynienia z dużo wyższymi temperaturami (a przede wszystkim dużymi różnicami temperatur), a jednocześnie dużo mniejszymi odległościami niż w rzeczywistych sytuacjach, niemniej jednak pozwala to na obserwację tego niesamowitego zjawiska w dość łatwy i wygodny sposób.

Inspiracją do opracowania tego problemu było zadanie na XVIII Turniej Młodych Fizyków. Autor wraz ze szkolną drużyną z XIV LO im. S. Staszica w Warszawie reprezentowali Polskę na Międzynarodowym Turnieju Młodych Fizyków w Szwajcarii w 2005 r., gdzie zdobyli nagrodę III miejsca i na XVII MTMF w Australii w 2004 r., gdzie zajęli I miejsce. Opiekunem drużyny był mgr Stanisław Lipiński.

[1] E. Khular, K. Thyagarajan, A.K. Ghatak *A note on mirage formation*, Am. J. Phys., Vol. 45, No. 1, 01. (1977);

[2] R.W. Wood, *Some experiments on artificial mirages and tornadoes*, Phil. Mag. Vol. 47, No. 287, 04. (1899); tłumaczenie rosyjskie w „*Iskusstvennye mirazhi*”, Kvant 10, (1971).

[3] E.Tränkle, *Simulation of inferior mirages observed at the Halligen Sea*, Applied Optics, Vol. 37, No. 9, pp.1495-1505 (1998).



## Twierdzenie *abc* dla wielomianów

Jerzy BROWKIN\*

Będziemy rozpatrywali wielomiany o współczynnikach liczbowych. Wielkie twierdzenie Fermata dla wielomianów mówi, że jeżeli pewne niezerowe wielomiany  $f, g, h$  nie mają wspólnego dzielnika różnego od stałej i spełniają

$$f^n + g^n = h^n,$$

gdzie  $n \geq 3$ , to wszystkie one są stałe.

Twierdzenie *abc* jest uogólnieniem wielkiego twierdzenia Fermata dla wielomianów. Niech

$$(1) \quad F = f_1^{k_1} \cdot \dots \cdot f_r^{k_r}, \quad G = g_1^{l_1} \cdot \dots \cdot g_s^{l_s}, \quad H = h_1^{m_1} \cdot \dots \cdot h_t^{m_t},$$

gdzie

$$(2) \quad f_1, \dots, f_r, \quad g_1, \dots, g_s, \quad h_1, \dots, h_t$$

są dowolnymi niezerowymi wielomianami, a wykładniki  $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s, m_1, \dots, m_t$  są liczbami naturalnymi.

Twierdzenie *abc* dla wielomianów mówi, że jeżeli wielomiany  $F, G, H$  spełniają równanie

$$(3) \quad F + G = H,$$

nie mają wspólnego dzielnika różnego od stałej oraz suma stopni wielomianów (2) nie przekracza największego ze stopni wielomianów  $F, G, H$ , to wielomiany  $F, G, H$  są stałe.

Dowód twierdzenia *abc* nie jest trudny. Podamy najpierw pewne własności pochodnej wielomianu, które będą wykorzystane w dowodzie. Zachodzą wzory:

$$(pq)' = p'q + pq', \quad (p^k)' = kp'p^{k-1}.$$

Wobec tego  $p \cdot (p^k)' = kp' \cdot p^k$ . Podobnie

$$\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2}\right)' = k_1 p_1' p_1^{k_1-1} p_2^{k_2} + k_2 p_2' p_1^{k_1} p_2^{k_2-1}$$

i stąd

$$(p_1 p_2) \cdot \left(p_1^{k_1} p_2^{k_2}\right)' = (k_1 p_1' p_2 + k_2 p_1 p_2') \cdot (p_1^{k_1} p_2^{k_2}).$$

Ogólniej, dla większej liczby czynników mamy

$$(p_1 \cdot \dots \cdot p_n) \cdot \left(p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}\right)' = P_1 \cdot \left(p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}\right),$$

gdzie

$$(4) \quad P_1 = k_1 p_1' p_2 \cdot \dots \cdot p_n + k_2 p_1 p_2' p_3 \cdot \dots \cdot p_n + \dots + k_n p_1 \cdot \dots \cdot p_{n-1} p_n'.$$

Inaczej mówiąc, dla dowolnego wielomianu  $P$  zapisanego w postaci  $P = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$  mamy

$$(5) \quad P_0 P' = P_1 P,$$



### Rozwiązanie zadania M 1221.

Oznaczmy przez  $a$  pierwszą, a przez  $b$  ostatnią cyfrę w zapisie dziesiętnym liczby  $k$ -cyfrowej  $n$ . Ponieważ liczba  $3n$  jest także  $k$ -cyfrowa, więc liczba  $a$  równa się 1, 2 lub 3. Ponadto

$$a \cdot 10^{k-1} < n < (a+1) \cdot 10^{k-1}$$

oraz

$$b \cdot 10^{k-1} < 3n < (b+1) \cdot 10^{k-1}.$$

Stąd w szczególności otrzymujemy

$$(b+1) \cdot 10^{k-1} > 3n > 3a \cdot 10^{k-1}$$

oraz

$$b \cdot 10^{k-1} < 3n < 3(a+1) \cdot 10^{k-1},$$

czyli  $b+1 > 3a$  oraz  $b < 3a+3$ .

Zauważmy ponadto, że cyfrą jedności liczby  $3b$  jest liczba  $a$ . Podstawiając  $a = 1, 2, 3$ , sprawdzamy bezpośrednio, że warunek ten nie da się pogodzić z otrzymanymi nierównościami. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że opisana w treści zadania liczba nie istnieje.

\*Instytut Matematyczny PAN