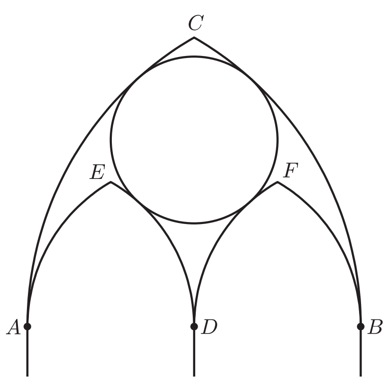
mała delta

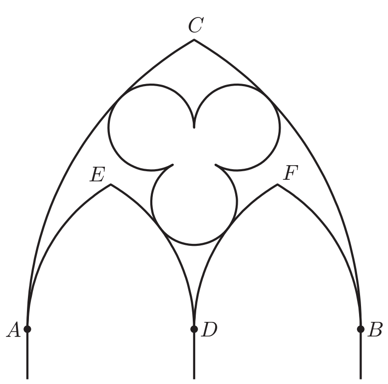
Okna gotyckie i trójliście



Rys. 1

W oknie gotyckim, które badaliśmy w ostatnich trzech artykułach, w wolną przestrzeń wewnątrz ostrołuku ACB i na zewnątrz dwóch mniejszych ostrołuków AED i DFB był wpisany okrąg (zob. rysunek 1). Okrąg ten był styczny wewnętrznie do łuków AC i CB oraz zewnętrznie do łuków ED i DF. W tym artykule przyjrzymy się dwóm innym oknom. W tych oknach w opisaną wyżej wolną przestrzeń wpiszemy nie okrąg, ale trójliść. Ten trójliść możemy wpisać na dwa sposoby (zob. rysunki 2 i 3). Takie dwa typy okien znajdują się w katedrze w Erfurcie.

Trójliść, jak zapewne pamiętamy, powstaje z trzech jednakowych okręgów parami stycznych zewnętrznie. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, jaki jest promień tych trzech okręgów i gdzie znajdują się ich środki.



Rys. 2

Zajmiemy się najpierw oknem przedstawionym na rysunku 2. Trójliść jest wyznaczony przez trzy okręgi o środkach O, P i Q. Niech K będzie punktem styczności okręgu o środku O z łukiem ED, niech L będzie punktem styczności okręgu o środku P z łukiem AC, niech wreszcie punkty M i N będą rzutami punktu P na proste CD i AB (nietrudno zauważyć, że punkt M jest punktem styczności okręgów o środkach P i Q). Przyjmijmy, że promienie tych trzech okręgów mają długość r. Przyjmijmy także, że odcinek AD ma długość 1. Równanie, którego rozwiązaniem jest r, otrzymamy stosując twierdzenie Pitagorasa do trzech trójkątów prostokątnych: ADO, OMP i NBP (zob. rysunek 4).

Zajmijmy się najpierw trójkątem ADO. Zauważmy, że

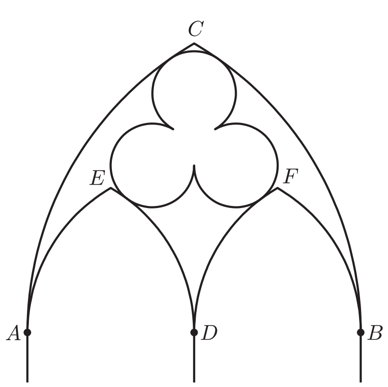
$$AO = AK + KO = AD + KO = 1 + r.$$

Stąd dostajemy

$$DO^2 = AO^2 - AD^2 = (1+r)^2 - 1 = 2r + r^2,$$

czyli

$$DO = \sqrt{2r + r^2}.$$



Rys. 3

Zauważmy następnie, że trójkąt OMP jest połową trójkąta równobocznego. Jego krótsza przyprostokątna PM ma długość r, a więc dłuższa przyprostokątna OM ma długość $r\sqrt{3}$.

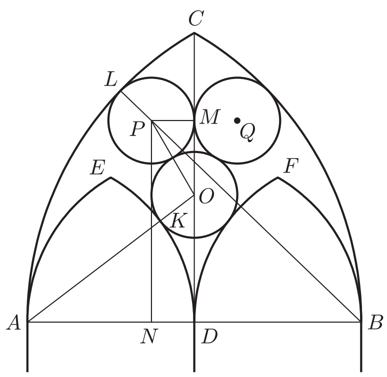
Wreszcie zajmijmy się trójkątem NBP. Mamy teraz

$$NP = DM = DO + OM = \sqrt{2r + r^2} + r\sqrt{3}.$$

Następnie

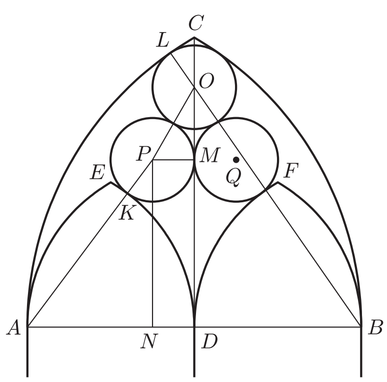
$$NB = ND + DB = r + 1 \quad \text{oraz} \quad BP = BL - PL = 2 - r.$$

Z twierdzenia Pitagorasa mamy równość
$$NP^2 + NB^2 = BP^2,$$
z której dostajemy równanie
$$\left(\sqrt{2r+r^2} + r\sqrt{3}\right)^2 + (r+1)^2 = (2-r)^2,$$
czyli
$$2r + r^2 + 2\cdot\sqrt{2r+r^2}\cdot r\sqrt{3} + 3r^2 + r^2 + 2r + 1 = 4 - 4r + r^2.$$
Po redukcji wyrazów podobnych dostajemy równanie
$$2r\sqrt{3}\cdot\sqrt{2r+r^2} = 3 - 8r - 4r^2.$$
Lewa strona tego równania jest liczbą nieujemną, a więc prawa też musi być nieujemna: $3 - 8r - 4r^2 \geqslant 0$. Rozwiązując tę nierówność kwadratową, otrzymujemy następujący warunek na r:
$$0 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{7}-2}{2} \approx 0{,}3229.$$



Rys. 4

Zakładamy zatem, że r spełnia ten warunek. Ponieważ obie strony równania są nieujemne, więc możemy podnieść je do kwadratu:
$$4r^2\cdot 3\cdot(2r+r^2) = 9 + 64r^2 + 16r^4 - 48r - 24r^2 + 64r^3.$$
Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie czwartego stopnia
$$4r^4 + 40r^3 + 40r^2 - 48r + 9 = 0.$$
To równanie ma cztery pierwiastki rzeczywiste, których wartości przybliżone wynoszą:
$$r_1 \approx 0{,}2571, \quad r_2 \approx 0{,}4891, \quad r_3 \approx -2{,}0599, \quad r_4 \approx -8{,}6863.$$
Tylko pierwszy z tych pierwiastków spełnia warunek nałożony wyżej na r, a więc ostatecznie
$$r \approx 0{,}2571.$$



Rys. 5

W podobny sposób, korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych ANP, PMO i DBO (zob. rysunek 5), otrzymujemy równanie czwartego stopnia
$$4r^4 - 16r^3 + 52r^2 - 48r + 9 = 0.$$
W tym przypadku r musi spełniać warunek
$$0 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{22}-4}{2} \approx 0{,}3452.$$
Nasze równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste:
$$r_1 \approx 0{,}2506, \quad r_2 \approx 0{,}9583,$$
z których tylko pierwszy spełnia powyższy warunek. Zatem w tym przypadku
$$r \approx 0{,}2506.$$

Rozumowanie znacznie wykraczające poza ramy tego artykułu pokazuje, że pierwiastki otrzymanych równań czwartego stopnia nie są konstruowalne, tzn. odcinków o tych długościach nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki, mając dany wyłącznie odcinek długości jednostkowej. Ponieważ w naszym przypadku przyjęliśmy za jednostkę długość odcinka AD, więc mając daną tylko rozpiętość ostrołuku, nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki promienia okręgów tworzących trójliść. Nie powinno nas zatem dziwić to, że budowniczowie katedr rysowali te trójliście „metodą prób i błędów”, uzyskując zadowalającą dokładność; taką, że niedokładności nie są widoczne gołym okiem.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI