



# mała delta

## Jaki dzień tygodnia?

Często zastanawiamy się, jakiego dnia tygodnia miało miejsce pewne wydarzenie. Jeśli to było w tym roku, to wystarczy zajrzeć do kalendarza. Ale co zrobić, gdy było to kilka, kilkanaście albo kilkadziesiąt lat temu? Dni tygodnia powtarzają się cyklicznie: jeśli dziś jest wtorek, to siedem dni temu też był wtorek i czternaście dni temu też wtorek, i siedemdziesiąt dni temu także wtorek. Możemy domyślać się, że pomocne w dalszych rozważaniach będą kongruencje modulo 7. Przypomnijmy to pojęcie.

**Określenie.** Ustalona jest pewna liczba naturalna  $m > 1$ . Liczby całkowite  $a$  i  $b$  przystają modulo  $m$  (pozostają w kongruencji modulo  $m$ ), co zapisujemy symbolicznie  $a \equiv b \pmod{m}$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $m \mid (a - b)$  (liczba  $a - b$  jest podzielna przez  $m$ ).

To jest relacja równoważności w zbiorze liczb całkowitych  $\mathbb{Z}$ . Dwie liczby przystają modulo  $m$ , jeśli dają równe reszty z dzielenia przez  $m$ .

Kongruencje o tym samym module można dodawać stronami, odejmować stronami i mnożyć stronami: jeśli  $a \equiv b \pmod{m}$  i  $c \equiv d \pmod{m}$ , to  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ ,  $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ ,  $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$ .

Dowód jest prosty. Z założenia wynika, że liczby  $a - b$  i  $c - d$  są podzielne przez  $m$ , więc  $a - b = k \cdot m$ ,  $c - d = l \cdot m$ . Dodając te równości stronami, stwierdzamy, że  $(a + c) - (b + d)$  jest liczbą podzielną przez  $m$ , ma więc miejsce kongruencja  $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ . Podobnie postępujemy przy dowodzie tego, że kongruencje można odejmować i mnożyć.

Wróćmy do pytania, w jakim dniu tygodnia miało miejsce pewne wydarzenie.

Ponumerujemy dni tygodnia:

|                   |                           |             |
|-------------------|---------------------------|-------------|
| 1 – poniedziałek, | 2 – wtorek,               | 3 – środa,  |
| 4 – czwartek,     | 5 – piątek,               | 6 – sobota, |
|                   | 0 $\equiv$ 7 – niedziela. |             |

Po upływie  $n$  dni od danej daty  $d$  wypada dzień tygodnia, którego numer przystaje do  $d + n$  modulo 7. Wynikają stąd następujące wnioski.

**Wniosek 1.** Jeśli od ustalonego dnia tygodnia o numerze  $d$  upłynie 365 dni (rok zwykły), będzie to dzień tygodnia o numerze  $d + 1$ , natomiast 365 dni wcześniej był dzień tygodnia o numerze  $d - 1$ .

**Dowód.** Numer dnia tygodnia za rok od dnia  $d$  przystaje modulo 7 do liczby  $d + 365 = d + 350 + 14 + 1 \equiv d + 1 \pmod{7}$ .



Na przykład, zajrzyjmy do kalendarza: 1 stycznia 2010 r. był w piątek, więc rok 2011 zacznie się w sobotę, natomiast rok 2009 zaczynał się w czwartek.

Analogicznie można uzasadnić

**Wniosek 2.** *Jeśli od ustalonego dnia tygodnia o numerze  $d$  upływie 366 dni (rok przestępny), będzie to dzień tygodnia o numerze  $d + 2 \pmod{7}$ , natomiast 366 dni wcześniej był dzień tygodnia o numerze  $d - 2 \pmod{7}$ .*

**Przykład 1.** Trzecie tysiąclecie rozpoczęło się 1 stycznia 2001 r. Jaki to był dzień tygodnia? Ponieważ od dnia 1 stycznia 2001 r. do piątku 1 stycznia 2010 roku upłynęło 9 lat, w tym dwa lata przestępne (2004 i 2008), więc numer  $d$  dnia tygodnia 1 I 2001 spełnia kongruencję

$$d \equiv 5 - 9 - 2 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Zatem obecne, trzecie tysiąclecie rozpoczęło się w poniedziałek.

**Przykład 2.** We wtorek, 1 września ub.r. przypadała 70. rocznica rozpoczęcia drugiej wojny światowej. W jakim dniu tygodnia miało miejsce to tragiczne wydarzenie?

Od daty 1 września 1939 roku do wtorku 1 września 2009 r. minęło 70 lat, w tym 18 lat przestępnych (przed dziesięcioma laty była 60. rocznica,  $60 : 4 = 15$ , więc do 1999 roku minęło 15 lat przestępnych, a potem jeszcze były lata przestępne 2000, 2004, 2008). Zatem numer  $n$  interesującego nas dnia spełnia kongruencję

$$n \equiv 2 - 70 - 18 \pmod{7}.$$

Stąd

$$n \equiv -16 \equiv 5 \pmod{7}.$$

Druga wojna światowa rozpoczęła się w piątek.

Przy sięganiu do dat znacznie wcześniejszych trzeba uwzględnić fakt, że w roku 1582 obowiązujący wcześniej kalendarz juliański został zastąpiony przez papieża Grzegorza XIII kalendarzem, który od jego imienia nosi nazwę gregoriańskiego. W kalendarzu juliańskim każdy rok o numerze podzielny przez 4 był przestępny i miał 366 dni, pozostałe lata były zwykle i miały po 365 dni. Kalendarz gregoriański wprowadził następujące wyjątki od tej zasady: rok o numerze podzielny przez 100, ale nie przez 400, jest rokiem zwykłym. Dotychczas spośród lat o numerach podzielnych przez 4 latami zwykłymi były następujące trzy: 1700, 1800, 1900. Ponadto pominięto w kalendarzu 10 dat od 5 do 14 października 1582 r.

**Przykład 3.** W jakim dniu tygodnia odbyła się bitwa pod Grunwaldem? Było to 15 lipca 1410 r.

Można sprawdzić w kalendarzu, że 15 lipca 2010 r. wypadnie w czwartek i będzie to okrągła 600. rocznica bitwy. Gdyby nie poprawki gregoriańskie, moglibyśmy napisać kongruencję

$$n \equiv 4 - 600 - 150 \pmod{7}.$$

Po uwzględnieniu 10 usuniętych dat i lat 1700, 1800, 1900, które nie są przestępne, mamy jednak

$$n \equiv 4 - 600 - 150 + 10 + 3 \pmod{7},$$

tj.  $n \equiv -733 \pmod{7}$ . Ponieważ

$$-733 = -700 - 35 + 2,$$

więc  $n \equiv 2 \pmod{7}$ , a zatem bitwa pod Grunwaldem rozpoczęła się we wtorek.

**Przykład 4.** W każdym roku 13. dzień pewnego miesiąca (co najmniej jednego) wypada w piątek (dzień feralny). Oczywiście to, w jakim dniu tygodnia wypadnie 13. dzień miesiąca, zależy od tego, w jakim dniu był początek tego miesiąca. Wystarczy więc stwierdzić, że numery dni tygodnia pierwszych dni kolejnych miesięcy wyczerpują wszystkie liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Przyjmijmy dla uproszczenia, że 1 stycznia wypadł w poniedziałek. Jeśli rozważamy rok zwykły, to:

$1 + 31 \equiv 4 \pmod{7}$ , więc 1 lutego jest w czwartek,  
 $4 + 28 \equiv 4 \pmod{7}$ , więc 1 marca jest w czwartek,  
 $4 + 31 \equiv 7 \pmod{7}$ , więc 1 kwietnia jest w niedzielę,  
 $7 + 30 \equiv 2 \pmod{7}$ , więc 1 maja jest we wtorek,  
 $2 + 31 \equiv 5 \pmod{7}$ , więc 1 czerwca jest w piątek,  
 $5 + 30 \equiv 7 \pmod{7}$ , więc 1 lipca jest w niedzielę,  
 $7 + 31 \equiv 3 \pmod{7}$ , więc 1 sierpnia jest w środę,  
 $3 + 31 \equiv 6 \pmod{7}$ , więc 1 września jest w sobotę,

i w ten sposób każdy z dni tygodnia przypada na początek jakiegoś miesiąca.

Jeśli natomiast rok jest przestępny, to przyjmując, że 1 stycznia jest w poniedziałek, mamy podobnie:

$1 + 31 \equiv 4 \pmod{7}$ , więc 1 lutego jest w czwartek,  
 $4 + 29 \equiv 5 \pmod{7}$ , więc 1 marca jest w piątek,  
 $5 + 31 \equiv 1 \pmod{7}$ , więc 1 kwietnia jest

w poniedziałek,

$1 + 30 \equiv 3 \pmod{7}$ , więc 1 maja jest w środę,  
 $3 + 31 \equiv 6 \pmod{7}$ , więc 1 czerwca jest w sobotę,  
 $6 + 30 \equiv 1 \pmod{7}$ , więc 1 lipca jest w poniedziałek,  
 $1 + 31 \equiv 4 \pmod{7}$ , więc 1 sierpnia jest w czwartek,  
 $4 + 31 \equiv 7 \pmod{7}$ , więc 1 września jest w niedzielę,  
 $7 + 30 \equiv 2 \pmod{7}$ , więc 1 października jest

we wtorek

i znów otrzymaliśmy wszystkie dni tygodnia.

Tak więc rzeczywiście w każdym roku jest (co najmniej jeden) piątek trzynastego.

*Małą Deltę przygotował Maciej BRYŃSKI*