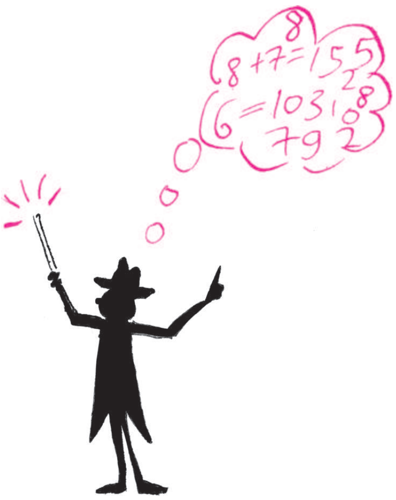
Jaka to liczba?

Francesc ROSSELLÓ[*]



Na ogół matematycy nie są ulubionymi gośćmi na przyjęciach. Poprzedza nas reputacja nudziarzy, zanurzonych myślami w definicjach i twierdzeniach. A jednak możemy użyć naszej wiedzy, by oczarować zebranych magicznymi trikami, opartymi na własnościach matematycznych. Może przy okazji ktoś zainteresuje się matematyką?

W jednej ze swoich pierwszych książek *Mathematics, Magic and Mystery*, przywoływanej już w tym numerze *Delty*, Martin Gardner pokazuje wiele magicznych chwytów matematycznych. Niektóre z nich, polegające na odgadywaniu ukrytej liczby, wywodzą się z następującej własności liczby 9:

Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną. Sumujemy jej cyfry, a następnie sumujemy cyfry otrzymanego wyniku – i tak dalej, aż do uzyskania liczby jednocyfrowej (zwanej pierwiastkiem cyfrowym wyjściowej liczby i oznaczanej symbolem $[n]$). Wówczas jeśli

- n jest wielokrotnością 9, to $[n] = 9$;
- n nie jest wielokrotnością 9, to $[n]$ jest resztą z dzielenia n przez 9.

Wynika stąd, że dla dowolnych dodatnich liczb naturalnych n, m zachodzą równości $[n+m] = [[n]+[m]]$ oraz $[n \cdot m] = [[n][m]]$ (dlaczego?).

Książka Gardnera mieści wiele trików opartych na tej własności. Tu będzie mowa o takim, który – o dziwo – u Gardnera się nie pojawił, choć bardzo do niego pasuje. Wymaga on nieco wprawy obliczeniowej, a może także trochę umiejętności aktorskich. Prosimy kogoś (nazwijmy kogosia, na przykład, Anią) o wybranie w myślach liczby trzycyfrowej; nazwijmy ją abc. Teraz prosimy Anię, by gdzieś na kartce (niewidocznej dla nas) dodała wszystkie liczby otrzymane przez permutację cyfr wybranej liczby – bez niej samej – i podała nam tylko otrzymaną sumę. Na przykład, gdyby Ania pomyślała liczbę 527, powinna teraz dodać liczby 572, 257, 275, 725, 752. Przyjmujemy, że cyfry są rozróżnialne, a więc np. liczba 333 też daje 5 dodatkowych permutacji cyfr. Co więcej, nie przeszkadza nam 0, nawet jeśli pojawi się na początku nowej liczby.

Po otrzymaniu sumy prosimy Anię, by skoncentrowała myśli na wybranej na początku liczbie i po chwili (pokrywając umiejętnościami aktorskimi niezręczną przerwę potrzebną na obliczenia pamięciowe)... podajemy jej tę liczbę. Jak to możliwe? Zbadajmy całą sytuację.

Jeśli wymyśloną liczbą jest abc, to niech $S_{abc} = acb + bac + bca + cab + cba$ oraz $T_{abc} = abc + S_{abc}$. Rzecz jasna, znając S_{abc}, potrafimy podać liczbę abc, jeśli tylko potrafimy obliczyć T_{abc}, gdyż wtedy $abc = T_{abc} - S_{abc}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} T_{abc} &= (a\cdot 100 + b\cdot 10 + c) + \ldots + (c \cdot 100 + b\cdot 10 + a) = \\ &= (2\cdot a + 2\cdot b + 2\cdot c)(100+10+1) = 222\cdot(a+b+c). \end{aligned}$$

Widać, że znajomość liczby $a+b+c$ pozwoli wyznaczyć T_{abc}. Liczmy więc dalej:

$$S_{abc} = T_{abc} - abc = (2\cdot a + 2\cdot b + 2\cdot c)(100+10+1) - (a\cdot 100 + b\cdot 10 + c),$$

co po krótkich obliczeniach daje $S_{abc} = \textit{wielokrotność } 9 + 5\cdot(a+b+c)$, czyli $2\cdot S_{abc} = \textit{wielokrotność } 9 + 10\cdot(a+b+c) = \textit{wielokrotność } 9 + (a+b+c)$. Tak więc reszta r z dzielenia $a+b+c$ przez 9 jest równa reszcie z dzielenia $2\cdot S_{abc}$ przez 9, czyli pierwiastkowi cyfrowemu $[2\cdot S_{abc}]$. A ten pierwiastek możemy obliczyć, ponieważ znamy S_{abc} i wiemy, że $[2\cdot S_{abc}] = [2\cdot[S_{abc}]]$.

Znajomość reszty r to nie wszystko, choć dużo. Mamy bowiem $1 \leqslant a+b+c \leqslant 27$, a to oznacza, że $a+b+c$ może być równe r, $r+9$ lub $r+18$. Które z nich? Wróćmy do T_{abc} i rozpatrzmy te trzy możliwości:

$$T_{abc} = 222\cdot(a+b+c) = \begin{cases} 222\cdot r, \\ 222\cdot(r+9) = 222\cdot r + 1998, \\ 222\cdot(r+18) = 222\cdot r + 3996. \end{cases}$$

Rozwiązanie zadania M 1301.
Zauważmy, że Halinka, wykonując więcej rzutów, musi wyrzucić więcej orłów lub więcej reszek niż Ferdek. Z drugiej strony nie może wyrzucić jednocześnie więcej orłów i więcej reszek, ponieważ wtedy musiałaby oddać o co najmniej dwa rzuty więcej. To oznacza, że zajdzie dokładnie jedno z dwóch zdarzeń: Halinka wyrzuci więcej orłów albo wyrzuci więcej reszek. Ponieważ moneta jest symetryczna, więc prawdopodobieństwa obu tych zdarzeń są równe $\frac{1}{2}$.

[*]Universitat de les Illes Balears

Rozwiązanie zadania F 780.
Na stół działa siła ciężkości, wywierana przez leżącą na blacie część łańcucha, oraz impuls pędu. Górny koniec łańcucha po przebyciu odległości x spada z prędkością $\sqrt{2gx}$. Długość łańcucha leżącego na blacie to $x = gt^2/2$. Pęd przekazywany stołowi wynosi $p = mv\Delta x/l$, a siła w ten sposób wywierana jest równa

$$N = \frac{mv}{l}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l} = \frac{2mgx}{l}.$$

Ciężar łańcucha o długości x wynosi $Q = mgx/l$. Zatem sumaryczna siła jest równa

$$F = 3mg\frac{x}{l} = \frac{3}{2}\frac{m}{l}g^2t^2.$$

Widzimy, że te możliwe wartości T_{abc} różnią się o prawie 2000 (co najmniej), znamy S_{abc} i wiemy, że $100 \leqslant abc < 1000$. Pozwala to jednoznacznie wybrać odpowiednią z tych wartości. To pierwsza z nich, która jest większa od $S_{abc} + 100$.

Prześledźmy to na przykładzie liczby 527 wybranej przez Anię. Dowiadujemy się od niej, że $S_{527} = 2581$.

- Obliczamy $[2581] = 7$, mnożymy przez 2 i znów obliczamy pierwiastek cyfrowy. Dostajemy $r = 5$.
- Mnożymy: $222 \cdot 5 = 1110$.
- Pierwszą możliwą wartością T_{527} jest $1110 + 1998 = 3108$ i w rezultacie...
- ... wybraną liczbą jest $3108 - 2581 = 527$.

Pozostaje jeden szkopuł: jak szybko obliczyć w pamięci pierwiastek cyfrowy? Otóż jest prosta i szybka metoda. W trakcie sumowania cyfr wybranej liczby n (na przykład, od lewej) zastępujemy każdą sumę częściową większą od 9 sumą jej cyfr. Zobaczmy to na przykładzie liczby 8742953 (symbol $\equiv$ oznacza zastąpienie liczby dwucyfrowej sumą jej cyfr):

$$8 \to 8 + 7 = 15 \equiv 6 \to 6 + 4 = 10 \equiv 1 \to 1 + 2 = 3 \to$$
$$\to 3 + 9 = 12 \equiv 3 \to 3 + 5 = 8 \to 8 + 3 = 11 \equiv 2.$$

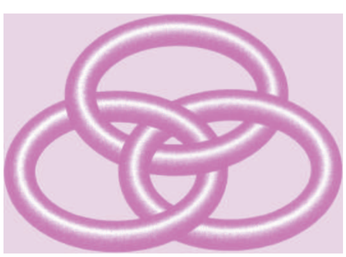
Tak więc $[8742953] = 2$. Trochę treningu i można iść na przyjęcie!

Zauważmy na koniec, że z własności pierwiastka cyfrowego można wyciągnąć interesujący wniosek. Jeśli w zapisie dziesiętnym pewnej wielokrotności liczby 9 brakuje jednej cyfry (i wiemy, że nie jest nią zero), łatwo możemy ją odtworzyć – jest nią ta cyfra, której brakuje pierwiastkowi cyfrowemu do 9, lub 9, gdy pierwiastkiem jest 9 (dlaczego?). Popatrzmy dla przykładu na liczbę 2308302, która jest wielokrotnością 9. Jeśli usunięto z niej cyfrę 8 i podano nam pozostałe cyfry (2, 3, 0, 3, 0, 2), obliczamy pierwiastek cyfrowy dowolnej liczby zbudowanej z tych cyfr, na przykład, $[230302] = 1$ i wiemy już, że brakującą cyfrą jest $9 - 1 = 8$.

Niestety, tak dobrze nie jest, gdy pozwolimy, by usuniętą cyfrą było 0. W naszym przykładzie mamy $[230832] = 9$, a to oznacza, że brakującą cyfrą może być 0 lub 9. Ale cóż, zgadywanie zawsze jest obarczone pewnym ryzykiem...

tłumaczył Wiktor BARTOL

Poliboromeusze



Matematycy wiedzą, że zabawy ze sznurkiem mogą być źródłem różnych zadań i problemów matematycznych, często bardzo poważnych, o daleko idących konsekwencjach. Węzłem w matematyce nazywa się sznurek, zapleciony lub nie, z utożsamionymi (zawiązanymi lub sklejonymi) końcami, czyli taki powyginany i zapleciony okrąg. Kilka takich węzłów nazywa się splotem, a elementy splotu ogniwami. Ogniwa w splocie mogą być zaczepione lub nie. Znany jest dość zaskakujący przykład splotu, nazywanego splotem Boromeuszów, gdyż występuje w herbie tego rodu. Splot Boromeuszów ma niezwykłą cechę: wszystkie trzy ogniwa są splecione, ale dowolne dwa nie. Oznacza to, że gdy rozetniemy dowolne ogniwo, pozostałe dwa będą niezaplecione. Pojawia się naturalne pytanie: czy można w podobny sposób zapleść 4, 5, 6 lub więcej ogniw (np. wykonanych właśnie ze sznurka)? W podobny sposób, czyli tak, że rozcięcie dowolnego ogniwa spowoduje rozpad całego splotu. Martin Gardner podaje taki przykład dla dowolnej liczby ogniw. Czy wiesz, Czytelniku, jak go skonstruować? (Rozwiązanie Gardnera w numerze.) Pojawiają się jednak kolejne pytania. Na przykład: czy dla czterech ogniw istnieje rozwiązanie różne od zaproponowanego przez Gardnera? Ile jest takich rozwiązań i czy w ogóle to się da określić? A gdy liczba ogniw będzie równa 5, 6 lub więcej?

Sploty o opisanych własnościach nazywane są czasem *splotami Brunna*, za D. Rolfsenem, autorem pięknej książki *Knots and Links*.

Zdzisław POGODA
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński