

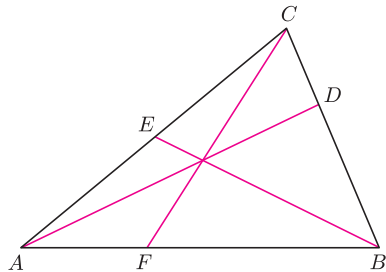
Twierdzenie Cevy

Joanna JASZUŃSKA

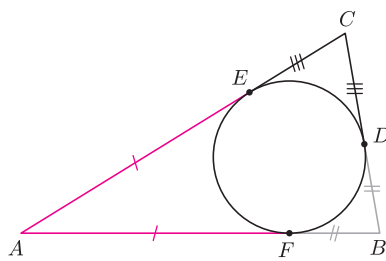
W wielu zadaniach dane są trzy proste, które albo przecinają się w jednym punkcie, albo należy to o nich udowodnić. Wygodnym narzędziem bywa wtedy

Twierdzenie Cevy. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC (rys. 1). Wówczas proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

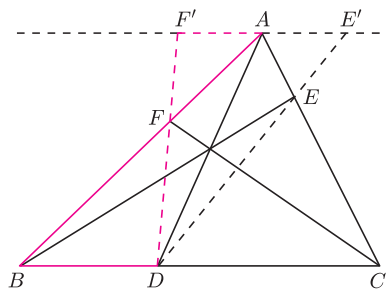
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$



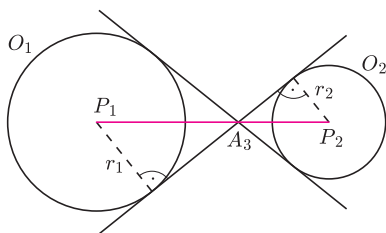
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4. Dla $i = 1, 2, 3$ przez r_i oznaczamy promień okręgu O_i .

1. W sytuacji z rysunku 1 wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia

$$\frac{AF}{FB} + \frac{BD}{DC} + \frac{CE}{EA}.$$

2. Punkty D, E, F są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio do boków BC, CA, AB . Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie (tzw. *punkcie Gergonne'a*).

3. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC , proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie. Proste DE i DF przecinają prostą równoległą do BC , przechodzącą przez punkt A , odpowiednio w punktach E' i F' . Udowodnij, że punkt A jest środkiem odcinka $E'F'$.

4. Dane są rozłączne zewnętrznie okręgi O_1, O_2, O_3 o środkach odpowiednio P_1, P_2, P_3 . Te dwie styczne do obu okręgów O_1, O_2 , które rozdzielają te okręgi, przecinają się w punkcie A_3 . Punkty A_1 i A_2 zdefiniowane są analogicznie. Wykaż, że proste P_1A_1, P_2A_2, P_3A_3 przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania

R1. Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną i z twierdzenia Cevy mamy

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{AF}{FB} + \frac{BD}{DC} + \frac{CE}{EA} \right) \geq \sqrt[3]{\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA}} = 1.$$

Stąd najmniejszą wartością sumy jest 3. Kiedy jest ona osiągnana? \square

R2. Zachodzą następujące równości odcinków stycznych do okręgu (rys. 2): $EA = AF, FB = BD, DC = CE$. Stąd

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{BD} \cdot \frac{BD}{CE} \cdot \frac{CE}{AF} = 1,$$

co na mocy twierdzenia Cevy kończy dowód. \square

R3. Skoro $AF' \parallel BD$, to $\triangle AF'F \sim \triangle BDF$ (rys. 3). Stąd $AF/FB = AF'/BD$. Podobnie $CE/EA = DC/E'A$. Z twierdzenia Cevy otrzymujemy tezę:

$$1 = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF'}{BD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{DC}{E'A} = \frac{AF'}{E'A}. \square$$

Wskazówka 4. Punkty P_1, A_3, P_2 są współliniowe (rys. 4) i z twierdzenia Talesa $P_1A_3/A_3P_2 = r_1/r_2$.

Zadania domowe:

5. Punkty D, E, F są punktami styczności okręgów dopisanych do trójkąta ABC odpowiednio do boków BC, CA, AB . Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie (tzw. *punkcie Nagela*).

6. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADF$. Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

7. Wykaż, że w jednym punkcie przecinają się: środkowe dowolnego trójkąta, dwusieczne dowolnego trójkąta, wysokości trójkąta ostrokątnego.

8. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Punkt M jest środkiem boku AB . Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q . Udowodnij, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ .

Zadanie 8 pochodzi z I etapu
L Olimpiady Matematycznej, rozwiązanie
można znaleźć na stronie www.om.edu.pl