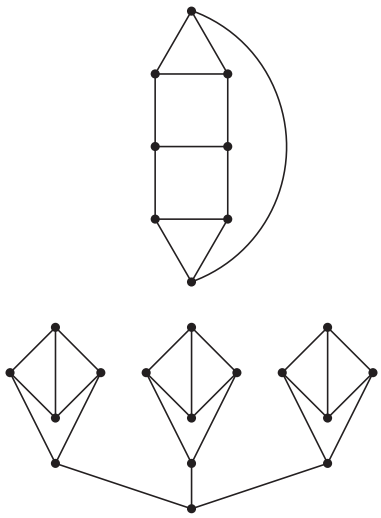
Skojarzenia w grafach kubicznych

Marcin PILIPCZUK[*]

Skojarzenia to bardzo popularny temat. Pojawiają się w różnych miejscach zarówno w informatyce, jak i w matematyce dyskretnej. Przypomnijmy: w grafie nieskierowanym G zbiór krawędzi M nazywamy *skojarzeniem*, jeśli żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca. W tym artykule zajmiemy się skojarzeniami w grafach kubicznych. Graf G nazwiemy *kubicznym*, jeśli każdy wierzchołek G ma stopień dokładnie 3.

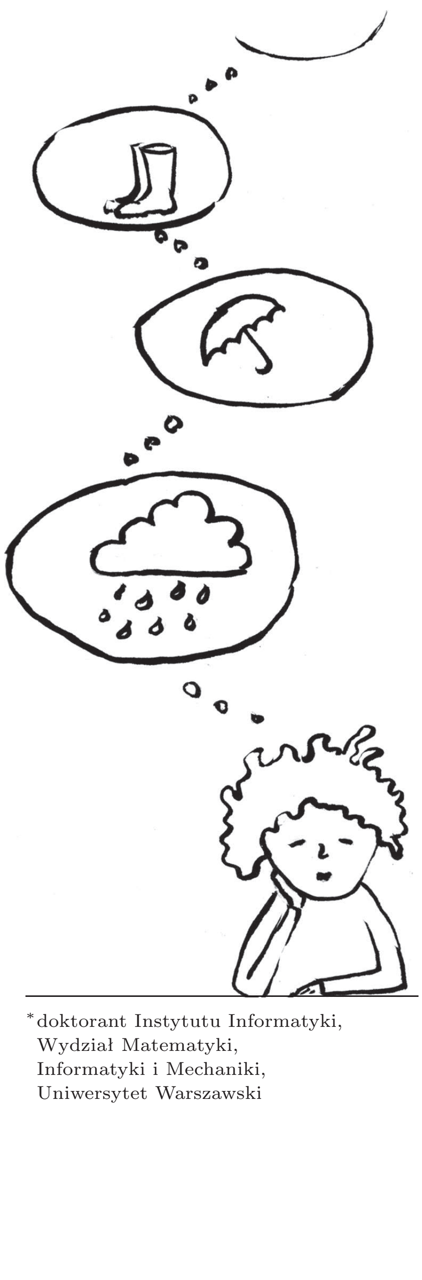


Dwa grafy kubiczne.

Mając dany graf G, przez $V(G)$ i $E(G)$ będziemy oznaczać odpowiednio zbiór wierzchołków i krawędzi G. Ponadto oznaczmy $n = |V(G)|$. Dla wierzchołka v przez $N(v)$ będziemy oznaczać zbiór sąsiadów v; tę notację rozszerzymy na podzbiory wierzchołków: $N(S) = (\bigcup_{v \in S} N(v)) \setminus S$. Skojarzenie M w grafie G nazwiemy *doskonałym*, jeśli ma ono rozmiar dokładnie $n/2$, czyli każdy wierzchołek G jest końcem jakiejś krawędzi skojarzenia. Na rysunku pokazane są dwa grafy kubiczne: pierwszy z nich ma doskonałe skojarzenie, a drugi nie ma. Czy łatwo jest odróżnić grafy kubiczne z doskonałym skojarzeniem od tych, które takiego nie mają?

By odpowiedzieć na to pytanie, przypomnijmy sobie wpierw twierdzenie Halla. Mamy graf dwudzielny H – dwudzielny, to znaczy, że zbiór wierzchołków $V(H)$ można podzielić na takie dwie części $V_A(H)$ i $V_B(H)$, że wszystkie krawędzie H łączą $V_A(H)$ z $V_B(H)$. Interesuje nas to, czy w tym grafie istnieje skojarzenie rozmiaru $|V_A(H)|$, czyli takie, że wszystkie wierzchołki ze zbioru $V_A(H)$ są skojarzone (każdy jest końcem pewnej krawędzi skojarzenia). Jeśli istnieje taki zbiór $S \subset V_A(H)$, że $|S| > |N(S)|$, to ewidentnie takie skojarzenie nie istnieje: wierzchołki z S mają za mało sąsiadów, by wszystkie były skojarzone. Twierdzenie Halla orzeka, że powyższy warunek jest decydujący: jeśli dla każdego $S \subset V_A(H)$ mamy $|S| \leqslant |N(S)|$, to w H istnieje skojarzenie rozmiaru $|V_A(H)|$.

Twierdzenie Halla mówi o istnieniu dużych – kojarzących wszystkie wierzchołki jednej części grafu – skojarzeń w grafach dwudzielnych. A jak to jest dla dowolnych grafów? O tym mówi twierdzenie Tutte. Obierzmy dowolny graf G i zastanówmy się, co może przeszkadzać w tym, by G miał doskonałe skojarzenie. Weźmy dowolny zbiór wierzchołków S i wyrzućmy go z grafu, otrzymując graf $G \setminus S$. Spójrzmy na pewną spójną składową $G \setminus S$: jeśli ma ona nieparzyście wiele wierzchołków, to w doskonałym skojarzeniu musiałaby istnieć krawędź łącząca wierzchołek z tej spójnej składowej z wierzchołkiem z S. Wobec tego nieparzystych spójnych składowych $G \setminus S$ nie może być więcej niż $|S|$. Twierdzenie Tutte mówi, że powyższy warunek jest wystarczający: jeśli dla każdego zbioru wierzchołków S po wyrzuceniu S w G pozostaje nie więcej niż $|S|$ nieparzystych spójnych składowych, to w G istnieje doskonałe skojarzenie.



Wróćmy teraz do grafów kubicznych. Okazuje się, że tym, co może przeszkadzać, by w grafie kubicznym istniało doskonałe skojarzenie, są mosty (patrz np. dolny graf na rysunku). Krawędź e jest *mostem*, jeśli nie leży w żadnym cyklu, tj. po wyrzuceniu krawędzi e końce e leżą w różnych spójnych składowych. Spróbujemy wykorzystać twierdzenie Tutte, by wykazać następujący lemat: *jeśli graf kubiczny G nie ma mostów, to ma doskonałe skojarzenie.* Chcemy użyć twierdzenia Tutte, weźmy więc dowolny podzbiór wierzchołków S i zastanówmy się, ile może być spójnych składowych o nieparzystej liczbie wierzchołków w $G \setminus S$. Weźmy taką spójną składową G_o. Zauważmy, iż łączny stopień wierzchołków G_o to $3 \cdot |V(G_o)|$: jest to liczba nieparzysta, czyli, na mocy lematu o uściskach dłoni, nieparzyście wiele krawędzi łączy G_o z resztą grafu. Jeśliby łączyła G_o z resztą grafu tylko jedna krawędź, to byłaby mostem: wobec tego istnieją co najmniej trzy krawędzie łączące G_o z resztą grafu. Skoro G_o było spójną składową $G \setminus S$, to te trzy krawędzie łączą G_o z S. Z drugiej strony, łączny stopień wierzchołków z S wynosi $3 \cdot |S|$, w $G \setminus S$ może być zatem co najwyżej $3 \cdot |S|/3 = |S|$ spójnych składowych o nieparzystej liczbie wierzchołków, co kończy dowód lematu.

Wiemy już, że jeśli graf kubiczny nie ma mostów, to ma doskonałe skojarzenie. Ale ile ma tych skojarzeń? Otóż do końca nie wiadomo. W latach 70. ubiegłego wieku László Lovász i Michael Plummer postawili hipotezę, że jest ich wykładniczo wiele: istnieje taka stała $c > 1$, że każdy graf kubiczny bez mostów ma co najmniej c^n doskonałych skojarzeń. Hipotezę tę dość szybko udowodnił Marc Voorhoeve dla grafów kubicznych dwudzielnych. Bardzo niedawno Maria Chudnovsky oraz Paul Seymour udowodnili hipotezę dla grafów planarnych: pokazali oni, że graf kubiczny planarny bez mostów ma co najmniej $2^{n/655\,978\,752}$ doskonałych skojarzeń. Z drugiej strony, Esperet, Král, Škoda i Škrekovski pokazali, że w dowolnym grafie kubicznym bez mostów mamy co najmniej $\frac{3}{4}n - 10$ doskonałych skojarzeń i jest nadzieja na to, że niedługo powstanie dowód, że istnieje ich co najmniej $Cn \log n$ dla pewnej stałej C. Jak widać, jeszcze długa droga pozostała do rozstrzygnięcia hipotezy Lovásza–Plummera.

[*]doktorant Instytutu Informatyki,
Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki,
Uniwersytet Warszawski