Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 605 ($WT = 2{,}35$) i 606 ($WT = 2{,}16$) z numeru 9/2010

Piotr Kumor	Olsztyn	44,70
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,03
Michał Kieza	Warszawa	38,62
Jerzy Cisło	Wrocław	37,37

Przez dobrych parę lat niezagrożony lider w kolekcjonowaniu rund „44” – Piotr Kumor – z przyczyn osobistych na dwa lata przerwał zabawę, oddając pozycję lidera Januszowi Olszewskiemu. Jednak powrócił do nas – z czego się ogromnie cieszymy – i właśnie zakończył rundę jedenastą!

Zadania z matematyki nr 621, 622

Redaguje Marcin E. KUCZMA

621. W nierównoramiennym trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, stycznego do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach X, Y, Z. Proste BC i YZ przecinają się w punkcie P. Dowieść, że proste IP i AX są prostopadłe.

622. Udowodnić nierówność

$$\frac{x+y}{1+x+y} + \frac{x+z}{1+x+z} \geqslant \frac{x}{1+x} + \frac{y+z}{1+y+z}$$

dla liczb $x, y, z \geqslant 0$.

Zadanie 622 zaproponował pan Tomasz Tkocz z Warszawy.

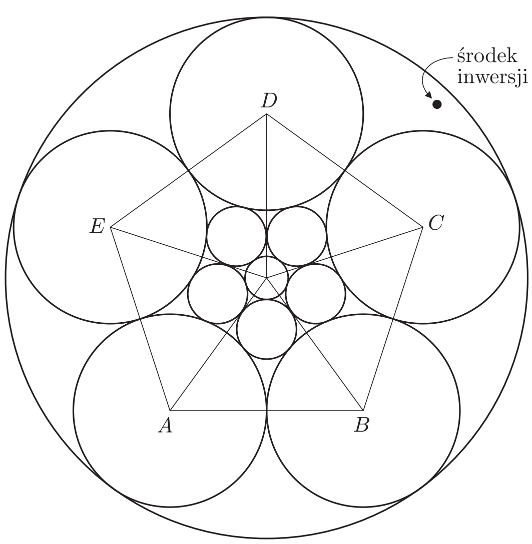
Rozwiązania zadań z numeru 1/2011

Przypominamy treść zadań:

613. Czy da się rozmieścić na płaszczyźnie skończenie wiele kół o rozłącznych wnętrzach tak, by każde z tych kół było styczne do pięciu innych?

614. Wyznaczyć wszystkie liczby wymierne x, niecałkowite, dla których wartość wyrażenia $3x^3 + 10x^2 - 3x$ jest liczbą całkowitą.

613. To jest wykonalne. Bierzemy pięciokąt foremny $ABCDE$ i rysujemy pięć okręgów o środkach w jego wierzchołkach, o jednakowym promieniu $\frac{1}{2}|AB|$. Niech O będzie środkiem pięciokąta. W trójkącie AOB umieszczamy okrąg styczny do odcinków OA, OB oraz do narysowanych już okręgów o środkach A, B. Podobne okręgi umieszczamy w trójkątach BOC, COD, DOE, EOA. Wreszcie rysujemy dwa okręgi o środku O: mały, styczny zewnętrznie do pięciu okręgów, narysowanych przed chwilą – oraz duży, styczny do pięciu okręgów, narysowanych na początku i zawierający je wewnątrz.



W ten sposób mamy 12 okręgów, każdy styczny do pięciu innych. Styczność z największym okręgiem jest stycznością wewnętrzną. Każda inna jest stycznością zewnętrzną.

Bierzemy teraz dowolny punkt, leżący wewnątrz tego największego okręgu, ale na zewnątrz każdego z pozostałych, i stosujemy inwersję względem tego punktu. Obrazami naszych 12 okręgów jest znów 12 okręgów, każdy styczny do pięciu innych – i każda styczność jest zewnętrzna. Koła, których brzegami są powstałe okręgi, spełniają wymagany warunek.

614. Niech x będzie jedną z szukanych liczb. Zapisujemy ją w postaci nieskracalnego ułamka $x = m/n$, o mianowniku $n > 1$. Liczba $3x^3 + 10x^2 - 3x$ ma być całkowita, co oznacza, że $3m^3 + 10m^2n - 3mn^2$ dzieli się przez n^3. Stąd w szczególności wynika, że $3m^3$ dzieli się przez n, więc $n = 3$. Zatem $3m^3 + 30m^2 - 27m$ dzieli się przez 27.

Stąd wniosek, że liczba $3m^3 + 3m^2$ jest podzielna przez 27; innymi słowy, $m^2(m+1)$ dzieli się przez 9. Skoro zaś m jest liczbą względnie pierwszą z n (czyli z 3), liczba $m+1$ musi być podzielna przez 9.

Dla pewnego k całkowitego mamy więc $m = 9k - 1$, skąd $x = 3k - \frac{1}{3}$. Na odwrót, gdy x ma taką postać, wówczas liczba $3x^3 + 10x^2 - 3x$ jest całkowita – o czym można się przekonać, analizując „wstecz” wcześniejsze rozumowanie, albo po prostu sprawdzając rachunkiem, że wartość tego wyrażenia wynosi $(9k-1)(9k^2+8k-2)$.

Szukanymi liczbami wymiernymi są więc liczby postaci $3k - \frac{1}{3}$ (k całkowite).

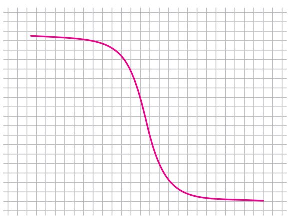
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2011

Zadania z fizyki nr 518, 519

Redaguje Jerzy B. BROJAN

518. Źródło dźwięku o stałej częstotliwości poruszało się ruchem jednostajnym po linii prostej przebiegającej w pewnej odległości od nieruchomego mikrofonu. Wykonano staranny pomiar zależności częstotliwości rejestrowanej przez mikrofon od czasu odebrania sygnału i zapisano wykres $f(t)$ na papierze milimetrowym. Niestety, zapomniano oznaczyć osie, wskutek czego arkusz papieru mógł zostać obrócony. Czy wykres jest symetryczny względem obrotu o 180°? Jeśli nie, to czy można rozstrzygnąć, czy jest on prawidłowy w danej postaci, czy też należy go obrócić? Załączony rysunek 1 jest tylko ilustracją problemu, a nie informacją o dokładnym przebiegu wykresu.

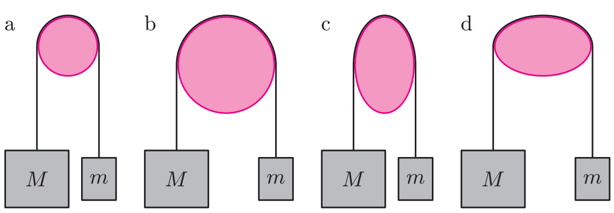


Rys. 1

519. Na lince zawieszono ciężar o masie M, a linkę przełożono przez nieruchomy walec o promieniu R. Na drugim końcu linki zawieszono najmniejszy ciężar m wystarczający do tego, aby większy ciężar nie ześlizgnął się w dół (rys. 2a). Jeśli ten sam ciężar M zawiesić na:

1) walcu o większym promieniu (rys. 2b),
2) podporze, której przekrój jest elipsą wydłużoną wzdłuż osi pionowej (rys. 2c) lub poziomej (rys. 2d),

to czy niezbędny ciężar m będzie mniejszy niż na rysunku a, większy, czy taki sam? Współczynnik tarcia linki o podporę jest w każdym przypadku jednakowy.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 1/2011

Przypominamy treść zadań:

510. Masa wolframowego włókna żarówki wynosi $m = 0{,}02$ g, a ciepło właściwe wolframu $c = 160$ J/(kg · K). Gdy żarówka była zasilana stałym napięciem 230 V, jej opór wynosił 800 Ω, a temperatura włókna była równa 2500 K. Podłączono tę żarówkę do napięcia sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz i wartości skutecznej 230 V. Obliczyć przybliżoną głębokość modulacji promieniowania żarówki, tzn. wielkość $(I_{\max} - I_{\min})/(I_{\max} + I_{\min})$, gdzie I – moc promieniowania. Założyć, że przepuszczalność szkła żarówki nie zależy od długości fali.

Można wykorzystać także następujące dane: gdy stałe napięcie zasilające zmieniano w niewielkim zakresie i powoli, na każdy 1 wolt jego przyrostu opór żarówki zwiększał się o 2,5 Ω, a temperatura włókna zwiększała się o 0,7 K.

511. Pod wpływem różnicy ciśnień w rurce o stałym przekroju występuje stacjonarny (niezmienny w czasie) i laminarny (bezwirowy) przepływ cieczy. Jeśli dwukrotnie zwiększymy średnicę rurki, nie zmieniając jej długości, różnicy ciśnień i rodzaju cieczy, to ile razy wzrośnie ilość cieczy przepływającej w ciągu jednostki czasu? Uzasadnić odpowiedź.

Wskazówka: Opory ruchu cieczy charakteryzuje współczynnik lepkości η zdefiniowany wzorem $\frac{F}{S} = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$, gdzie F – siła działająca stycznie na powierzchnię cieczy S, wzdłuż której następuje poślizg warstw, $\mathrm{d}v$ – różnica prędkości warstw na odcinku $\mathrm{d}y$ prostopadłym do S.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 506 ($WT = 2{,}92$) i 507 ($WT = 1{,}90$) z numeru 11/2010

Jerzy Witkowski	Radlin	37,45
Tomasz Rudny	Poznań	35,20
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	30,78
Tomasz Wietecha	Tarnów	29,21
Ryszard Woźniak	Kraków	16,47

510. Zapiszmy moc zasilającą żarówkę wzorem

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2}{R}\cos^2\omega t = \frac{U_{\mathrm{sk}}^2}{R}(1 + \cos 2\omega t),$$

gdzie U_0 – amplituda napięcia, $U_{\mathrm{sk}} = U_0/\sqrt{2}$ – wartość skuteczna. Przyrównujemy zmienny składnik mocy do wyrażenia $mc\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ i znajdujemy amplitudę zmian temperatury równą

$$T_0 = \frac{U_{\mathrm{sk}}^2}{2\omega mcR} = 33\ \mathrm{K}.$$

Korzystając ze wzoru Boltzmanna $I \sim T^4$, stwierdzamy, że szukana głębokość modulacji wynosi

$$(2533^4 - 2467^4)/(2533^4 + 2467^4) = 5{,}3\%.$$

Dane wymienione na końcu zadania są istotne przy dokładniejszej analizie równania bilansu cieplnego

$$\alpha_1 T'(t) + mc\mathrm{d}T'/\mathrm{d}t = P'(t),$$

gdzie primami oznaczono odchylenie wielkości T i P od ich wartości średnich, natomiast α_1 jest przyrostem mocy odprowadzanej do otoczenia na jednostkę przyrostu temperatury. Przy wzroście napięcia o $\Delta U = 1$ V przyrost tej mocy jest równy $\frac{231^2}{802{,}5} - \frac{230^2}{800} = 0{,}37$ W, czyli liczbowa wartość α_1 wynosi $0{,}37/0{,}7 = 0{,}53$ W/K. Ponadto po prawej stronie równania należałoby wziąć pod uwagę zależność R od temperatury w wyrażeniu $P = U^2/R$ – jak można wykazać, efekt ten jest równoważny dodaniu do α_1 członu $\alpha_2 = U_{\mathrm{sk}}^2\gamma/R$, gdzie γ jest temperaturowym współczynnikiem oporu. Wartość γ wynosi $2{,}5/(800 \cdot 0{,}7) = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$, stąd $\alpha_2 = 0{,}30$ W/K. Dla uwzględnionego wcześniej wyrażenia $mc\mathrm{d}T'/\mathrm{d}t$ wielkością analogiczną jest $2\omega mc = 2$ W/K, co oznacza, że w pierwszym przybliżeniu można α_1 i α_2 pominąć, zwłaszcza że w dokładniejszym rozwiązaniu porównywane wielkości wystąpiłyby w kwadracie.

511. Zastosujemy metodę analizy wymiarowej. Ruch cieczy jest jednostajny, dlatego jej gęstość nie ma znaczenia i jedynymi parametrami, od których zależy przepływ Q (wyrażony w m^3/s), są: średnica rurki d, jej długość l, różnica ciśnień p i lepkość η, której jednostką w układzie SI jest $\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}/\mathrm{m}^2$. Parametry p i l muszą wystąpić w postaci ilorazu $k = p/l$ o wymiarze N/m^3, który jest „czynnikiem napędowym” przepływu. Zatem

$$Q = f(d, k, \eta).$$

Zgodność wymiarów w zależności

$$\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} = f\left(\mathrm{m}, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}, \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}\right)$$

wystąpi tylko wtedy, gdy pierwszy argument wystąpi w potędze 4, drugi – w potędze 1, a trzeci – w potędze −1 (zależność ta jest znana jako wzór Hagena–Poiseuille'a). Po dwukrotnym powiększeniu średnicy rurki przepływ wzrośnie 16-krotnie.