

# Sprawa niezbyt pedagogiczna

Jerzy ZABCZYK\*

Richard Feynman, laureat Nagrody Nobla z fizyki, miał bardzo krytyczny stosunek do rozważań czysto teoretycznych. Wspomina o tym Kai Lai Chung, wybitny probabilista amerykański, w książce *Green, Brown and Probability*. Feynman wypowiadał się o *eternal futility* nie tylko matematyki wyższej, ale również teoretycznej fizyki i astronomii. Twierdził, że matematycy są niepotrzebni, bo gdy fizykowi jakiś wynik matematyczny będzie potrzebny, to sam potrafi go udowodnić. Wiedząc o tym, Chung postanowił z Feynmana zażartować i podczas spotkania w restauracji zaproponował mu udowodnienie następującego twierdzenia geometrycznego.

*Boki trójkąta dzielimy na trzy równe części każdy, a następnie łączymy odcinkami każdy z wierzchołków z pierwszym punktem podziału na przeciwległym boku. W rezultacie odcinki utworzą trójkąt, którego pole jest równe  $\frac{1}{7}$  pola wyjściowego trójkąta.*

Feynman przyjął ten fakt z niedowierzaniem i po kilku obliczeniach stwierdził, że twierdzenie nie jest prawdziwe, bo wskazują na to jego przybliżone obliczenia. Przyjął zakład, że ma rację, i poddał się dopiero wtedy, gdy stwierdził, że twierdzenie jest prawdziwe dla trójkąta równobocznego. W związku z tym zdarzeniem proponujemy kilka zadań.

**Zadanie 1.** Udowodnić sformułowane powyżej twierdzenie

- dla trójkąta równobocznego,
- dla trójkąta dowolnego.

**Zadanie 2.** Na bokach trójkąta zaznaczamy punkty w odległości od wierzchołków równej  $\gamma$  razy długość boku, gdzie  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ , i łączymy je odcinkami z przeciwległymi wierzchołkami. Jaki jest stosunek pól  $S(\gamma)$  trójkąta utworzonego z odcinków i wyjściowego trójkąta?

**Zadanie 3.** *Kontynuacja zadania 2.* Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne  $n$ , że gdy  $\gamma = \frac{1}{n}$ , to stosunek pól jest postaci  $\frac{1}{N}$  dla pewnej liczby naturalnej  $N$ .

**Zadanie 4.** *Kontynuacja zadania 3.* Znaleźć wszystkie takie wymierne liczby  $\gamma$ , że  $S(\gamma)$  jest również liczbą wymierną.

**Zadanie 5.** Czy dla czworokątów prawdziwe jest twierdzenie analogiczne do twierdzenia przedstawionego Feynmanowi?

**Zadanie 6.** *Kontynuacja zadania 2.* Wyznaczyć długości odcinków  $m_a, m_b, m_c$  łączących wierzchołki z zaznaczonymi punktami w zależności od liczby  $\gamma$  i długości boków trójkąta  $a, b, c$ .

## Podpowiedzi

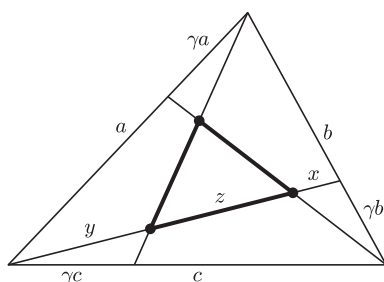
- $y : z : x = \gamma : (1 - 2\gamma) : \gamma^2$ .
- $m_a^2 = (1 - \gamma)b^2 + \gamma c^2 - \gamma(1 - \gamma)a^2$ ,  
 $m_b^2 = (1 - \gamma)c^2 + \gamma a^2 - \gamma(1 - \gamma)b^2$ ,  
 $m_c^2 = (1 - \gamma)a^2 + \gamma b^2 - \gamma(1 - \gamma)c^2$ .
- Niech  $\tilde{m}_a, \tilde{m}_b, \tilde{m}_c$  będą długościami boków otrzymanego trójkąta. Wtedy  
$$\tilde{m}_a = m_a \cdot \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma + \gamma^2}, \quad \tilde{m}_b = m_b \cdot \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma + \gamma^2}, \quad \tilde{m}_c = m_c \cdot \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma + \gamma^2}.$$

- Niech  $S_{a,b,c}$  oznacza pole trójkąta o bokach  $a, b, c$ . Udowodnić, że

$$\frac{S_{\tilde{m}_a, \tilde{m}_b, \tilde{m}_c}}{S_{a,b,c}} = \left( \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma + \gamma^2} \right)^2 (\gamma^2 + \gamma^2(1 - \gamma)^2 + (1 - \gamma)^2)^{1/2}$$

(=  $\frac{1}{7}$ , gdy  $\gamma = \frac{1}{3}$ ).

*Od redaktora:* Chung zapewne zaczerpnął zadanie z popularnego w angielskim kręgu językowym *Mathematical Snapshots* (w wydaniu z 1950 roku str. 8), czyli z *Kalejdoskopu matematycznego* Hugona Steinhausa (w wydaniu z 1989 roku zadanie i rozwiązanie jest na stronie 17).



\*Instytut Matematyczny PAN, Warszawa

[Kai Lai Chung, *Green, Brown and Probability*, World Scientific, 1995.]