

$$\pi^e < e^\pi$$

Jarosław GÓRNICKI*



Określenie to jest poprawne, gdyż ciąg sum częściowych

$$x_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}$$

jest rosnący i ograniczony z góry przez $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 3$, więc zbieżny.

Gdy poznajemy matematykę, liczby oznaczane symbolami e oraz π pojawiają się bardzo często. Uznając ważność tych liczb, badamy ich arytmetyczną naturę. Wiemy, że e jest liczbą niewymierną (L. Euler, 1737 r.) oraz π jest liczbą niewymierną (J.H. Lambert, 1767 r.). Przystępność liczby e wykazał Ch. Hermite w 1873 r., a przystępność liczby π wykazał w 1882 r. F. Lindemann. Wyznaczenie dobrych przybliżeń wartości tych liczb nie jest zadaniem banalnym. Przypomnijmy, jak można to zrobić.

Obliczamy e . Liczbę e definiujemy wzorem Newtona z 1665 r.

$$(1) \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Definicja (1) pozwala na obliczenie wartości liczby e z dużą dokładnością. Zauważmy, że dla $n \geq m + 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(m+1)!(m+1)^{n-(m+1)}},$$

więc możemy oszacować resztę szeregu:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(m+1)!} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{n-(m+1)}} = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m \cdot m!},$$

a stąd

$$0 < e - \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} < \frac{1}{m \cdot m!}.$$

Spróbujmy obliczyć wartość liczby e z sześcioma cyframi dokładnymi po przecinku, czyli wyznaczmy jej przybliżenie z dokładnością do $\frac{1}{10^7}$. W tym celu możemy wziąć $m = 10$, bo wówczas błąd nie przekracza $\frac{1}{10^7} < \frac{3}{10^8} < \frac{1}{10^7}$. Jeśli w wyrażeniu $x_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{10!}$ pozostawimy bez zmian pierwsze trzy składniki, a każdy z pozostałych ułamków zastąpimy zaokrągleniem na ósmym miejscu po przecinku, to sumaryczny błąd nie będzie większy niż $0,5 \cdot \frac{1}{10^8} \cdot 8 = 4 \cdot \frac{1}{10^8}$. W ten sposób otrzymujemy $e = 2,718281\dots$, przy czym wszystkie wypisane cyfry są poprawne.

Obliczamy π . Liczbę π definiujemy wzorem Leibniza z 1673 r. (wzór ten był znany J. Gregory'emu dwa lata wcześniej):

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Definicja Leibniza ma poważną wadę – praktycznie nie nadaje się do wyznaczania dokładnej wartości liczby π , ponieważ szereg jest zbyt wolno zbieżny. Wyznaczanie wartości π ze wzoru (2) z dokładnością do trzech miejsc po przecinku wymaga obliczenia sumy aż 10 000 kolejnych składników. Skorzystamy więc z rozwinięcia Gregory'ego:

$$\arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{dla } |x| \leq 1,$$

w którym zbieżność sumy jest tym szybsza, im bliżej zera wybierzemy punkt x . Wykorzystał to J. Machin w 1706 r., proponując bardzo sprytną metodę obliczenia wartości π z dużą dokładnością. Oto metoda Machina.

Niech $A = \arctg \frac{1}{5}$, wtedy $0 < A < \frac{\pi}{4}$ i $\tg A = \frac{1}{5}$. Następnie obliczamy:

$$\tg 2A = \frac{2 \tg A}{1 - \tg^2 A} = \frac{5}{12} \quad \text{i} \quad \tg 4A = \tg 2(2A) = \frac{120}{119}.$$

Ponieważ liczba $\frac{120}{119}$ jest bliska jedności, więc kąt $4A$ jest bliski $\frac{\pi}{4}$. Niech $B = 4A - \frac{\pi}{4}$. Wówczas $-\frac{\pi}{4} < B < \frac{3}{4}\pi$, a ponieważ

$$\tg B = \tg \left(4A - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tg 4A - 1}{1 + \tg 4A} = \frac{1}{239} > 0,$$

Uzasadnienie wzoru (2) nie jest trudne, gdy znamy podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Punktem wyjścia jest równość ($n = 2k + 1$)

$$\frac{1}{1+x^2} = (1-x^2+x^4-x^6+\dots + x^{2n-2}-x^{2n}) + \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Całkując obie strony, otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

i korzystamy z równości

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

oraz oszacowania

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx < \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3},$$

przechodząc z n do nieskończoności.

*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska

więc $0 < B < \frac{\pi}{2}$ i $B = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$. Stąd otrzymujemy *wzór Machina*:

$$\begin{aligned} \pi &= 4(4A - B) = 16 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 16}{(2n+1) \cdot 5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{(2n+1) \cdot 239^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz obliczyć kilka początkowych wyrazów pierwszego i drugiego szeregu, aby otrzymać dość dokładną wartość liczby π .

Przez s_k i t_k , dla $k \geq 0$, oznaczymy odpowiednio k -tą sumę częściową pierwszego i drugiego szeregu we wzorze Machina, a przez s i t sumy tych szeregów (które istnieją i są skończone, co wynika np. z kryterium Leibniza). Ponieważ $s_{2k+1} < s < s_{2k}$ oraz $t_{2k+1} < t < t_{2k}$, więc zachodzą nierówności $0 < s - s_3 < s_4 - s_3 = \frac{16}{9 \cdot 5^9} < \frac{1}{10^6}$ i $0 < t - t_1 < t_2 - t_1 = \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{2}{10^{12}}$. Stąd otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$-\frac{2}{10^{12}} < (s - s_3) - (t - t_1) = \pi - (s_3 - t_1) < \frac{1}{10^6}.$$

Wynika z niego, że jeśli dodamy składniki sum częściowych w wyrażeniu $s_3 - t_1$, zaokrąglone na ósmym miejscu po przecinku, to otrzymamy przybliżenie liczby π z poprawnymi początkowymi pięcioma cyframi rozwinięcia dziesiętnego: $\pi = 3,14159\dots$

Dowody nierówności. Możemy teraz przystąpić do wykazania tytułowej nierówności, co zrobimy pięcioma sposobami.

Sposób I. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ dla $x > 0$. Ponieważ

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^e - e^x \cdot ex^{e-1}}{(x^e)^2} = \frac{x^{e-1} \cdot e^x \cdot (x - e)}{(x^e)^2},$$

więc $f'(e) = 0$, $f'(x) < 0$ dla $0 < x < e$ i $f'(x) > 0$ dla $x > e$. W punkcie $x = e$ funkcja f osiąga minimum i, podstawiając $x = \pi$, otrzymujemy nierówność $f(\pi) = \frac{e^\pi}{\pi^e} > f(e) = 1$.

Sposób II. Udowodnimy pomocniczą nierówność $e^x > 1 + x$ dla $x > 0$. Niech $f(x) = e^x$ i $g(x) = 1 + x$ dla $x \geq 0$. Wówczas $f(0) = g(0)$ i $f'(x) > g'(x)$ dla $x > 0$. Rozważmy funkcję $F(t) = f(t) - g(t)$ określoną na dowolnym przedziale $[0, x]$, gdzie $x > 0$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje takie $\xi \in (0, x)$, że $F(x) - F(0) = F'(\xi)(x - 0)$. Stąd $F(x) = F'(\xi)x = (f'(\xi) - g'(\xi))x > 0$, czyli dla dowolnej wartości $x > 0$

$$e^x = f(x) > g(x) = 1 + x.$$

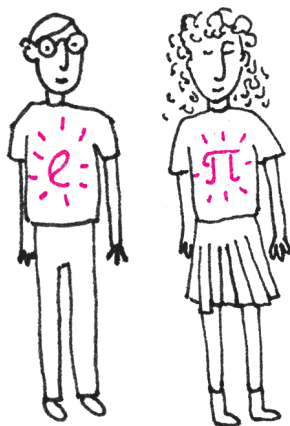
Podstawiając $x = \frac{\pi}{e} - 1$ do powyższej nierówności, otrzymujemy $e^{\frac{\pi}{e}-1} > 1 + (\frac{\pi}{e} - 1)$, a stąd $\frac{e^\pi}{e} > \frac{\pi}{e}$ i ostatecznie $e^\pi > \pi^e$.

Sposób III. Rozważmy funkcję $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ dla $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln x)$, więc $f'(e) = 0$, $f'(x) > 0$ dla $0 < x < e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > e$. W punkcie $x = e$ funkcja f osiąga maksimum. Zatem $f(\pi) < f(e)$, czyli $\pi^{\frac{1}{\pi}} < e^{\frac{1}{e}}$, a stąd otrzymujemy wyjściową nierówność.

Sposób IV. Niech $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}$, $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = \frac{e-x}{e \cdot x}$, więc łatwo sprawdzić, że w punkcie $x = e$ funkcja f osiąga maksimum. Zatem dla $x = \pi$ otrzymujemy $e \ln \pi < \pi$. Ponieważ e^x jest funkcją rosnącą, więc $e^{e \ln \pi} < e^\pi$, co kończy dowód.

Sposób V. Tym razem rozpatrzmy funkcję $f(x) = e^{1+\frac{x}{e}} - (x + e)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ $f'(x) = e^{\frac{x}{e}} - 1$, więc f ma minimum w $x = 0$. Stąd dla $x \neq 0$ mamy nierówność $e^{1+\frac{x}{e}} > x + e$. Dla $x > 0$ wynika z niej $e^{e+x} > (e+x)^e$. Wystarczy teraz podstawić $x = \pi - e$.

Na zakończenie odnotujmy, że obliczenia komputerowe dają przybliżone wartości $e^\pi \approx 23,140692$ i $\pi^e \approx 22,459157$. W 1929 r. A. Gelfond wykazał, że liczba e^π jest przestępna. Natomiast natura arytmetyczna liczby π^e jest dotychczas nieznana.



Jeśli znamy rozwinięcie e^x w szereg potęgowy

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots,$$

to oczywiście wiemy, że $e^x > 1 + x$ dla $x > 0$, ale, jak widać, można to udowodnić bardziej elementarnie.



Rozwiązanie zadania M 1327. Jeśli pewne trzy spośród rozważanych pięciu liczb dają tę samą resztę z dzielenia przez 3, to wybieramy je i ich suma jest podzielna przez 3. W przeciwnym przypadku pewne trzy liczby dają parami różne reszty z dzielenia przez 3 – te właśnie wybieramy.