

# Suma nieskończona – co to jest?

Michał KRYCH\*

W różnych sytuacjach pojawiają się sumy nieskończenie wielu składników. Już w szkołach podstawowych pojawiają się obiekty typu  $7132,32323232323 \dots$ . Należy, oczywiście, rozumieć, że chodzi o liczbę

$$7130 + 2,3 + 0,023 + 0,00023 + 0,0000023 + \dots$$

Oznaczając  $x = 2,3 + 0,023 + 0,00023 + 0,0000023 + \dots$ , otrzymujemy równość  $x = 2,3 + \frac{x}{100}$ , z której wnioskujemy, że  $x = \frac{2,3}{0,99} = \frac{230}{99} = 2\frac{32}{99}$ , zatem  $7132,323232323 \dots = 7132\frac{32}{99}$ . Rozumowanie to możemy uogólnić. Obliczmy sumę  $S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$  – w podanym wcześniej przykładzie było  $a = 2,3$  oraz  $q = \frac{1}{100}$ . Mamy

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = a + q(a + aq + aq^2 + \dots) = a + qS,$$

więc jeśli tylko  $q \neq 1$ , to  $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = S = \frac{a}{1-q}$ . Podstawiając  $a = 1$ ,  $q = -1$ , otrzymujemy równość

$$(\$) \quad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Jednak mamy też

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

oraz

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Wobec tego  $\frac{1}{2} = 0 = 1$ , co nawet absolwentom współczesnych szkół może wydać się podejrzane.

Tylko nieliczni zakwestionowaliby równość

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

W końcu po obu stronach równości występują te same liczby, co prawda kolejność składników jest inna, ale są to te same składniki. Jednak zachodzą „oczywiste” równości

$$\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots\right) -$$

$$- \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots\right) =$$

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots\right) -$$

$$- \left(\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \dots\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots\right).$$

Z tych równości wynika od razu, że

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots =$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots\right),$$

co wygląda źle, bo zachodzi oczywista nierówność

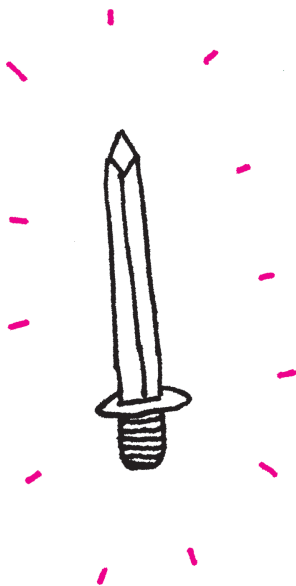
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots >$$

$$> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

– w każdym nawiasie jest liczba dodatnia, a po pomnożeniu liczby dodatniej przez 2 otrzymujemy liczbę większą od wyjściowej!

Zmarły ojciec zostawił Janowi i Józefowi w spadku jeden cudowny miecz. Ustalili, że w pierwszym roku miecz będzie u Jana, w drugim u Józefa, w trzecim znów u Jana itd. W ten sposób podzielili spadek na pół. Taka bajeczka miała w XVIII w. przemawiać za słusnością wzoru (§).



\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Niels Abel (1802–1829): *Z wyjątkiem szeregu geometrycznego nie istnieje w matematyce ani jeden szereg, którego sumę można dokładnie zdefiniować. Cóż, świat się powoli zmienia...*

Jasne też jest, że

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots < \\ & < \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \\ & \quad + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots = \\ & = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \\ & \quad + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots = 1, \end{aligned}$$

więc suma

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots$$

jest liczbą z przedziału  $(\frac{1}{2}, 1)$ , zatem nie uratuje nas ani równość  $2 \cdot 0 = 0$ , ani  $2 \cdot \infty = \infty$ .

Takich rozumowań, prowadzących do wyników sprzecznych ze zdrowym rozsądkiem, można podać dowolnie wiele. Po to, by móc porozumiewać się i mieć szansę na poprawne rozumowania, trzeba zdefiniować sumę nieskończoną. Potem trzeba się zastanowić nad własnościami działań w nowej sytuacji.

Sumą nieskończoną, czyli sumą szeregu o wyrazach  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , nazywamy granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  ciągu sum częściowych, którego kolejnymi wyrazami są sumy początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ :  $s_0 = a_0$ ,  $s_1 = a_0 + a_1$ ,  $s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$

Jeśli suma szeregu jest skończona, to mówimy, że szereg jest **zbieżny**. Jeśli suma szeregu jest nieskończona lub jeśli ciąg sum częściowych szeregu nie ma granicy, to mówimy o szeregu **rozbieżnym**. Jeśli szereg ma sumę, skończoną lub nieskończoną, to oznaczamy ją symbolem

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

W świetle tej definicji suma  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  po prostu nie istnieje, bo ciąg sum częściowych wygląda tak:  $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ , więc nie ma granicy. Podobnie nie jest prawdą, że  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$ , bo w „wyprowadzeniu” wzoru  $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = \frac{a}{1-q}$  traktowaliśmy sumę  $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$  jak liczbę, a ta suma jest równa  $+\infty$  – po drodze odejmowaliśmy  $+\infty$  od  $+\infty$ , a tego działania sensownie zdefiniować nie sposób.

Suma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots$$

jest dobrze zdefiniowana, co łatwo można wykazać:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} &< 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} < \\ &< 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} < \dots, \end{aligned}$$

więc ciąg „parzystych” sum częściowych jest rosnący, podobnie

$$1 > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \dots,$$

więc ciąg „nieparzystych” sum częściowych maleje, a ich różnica dąży do zera, zatem oba mają tę samą granicę, wobec tego skończoną. Pokazaliśmy wcześniej, że zmiana kolejności składników tej sumy może prowadzić do dwukrotnego zmniejszenia jej wartości.

Czytelnikowi proponujemy udowodnienie równości

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots \right) = \\ & = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \dots \end{aligned}$$

– znów po obydwu stronach równości są te same liczby, ale w innej kolejności.



Z nierówności  $1 + \frac{1}{2} > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ,  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} > 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$  itd. wynika, że gdyby suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

była skończona, to byłaby większa od siebie, a to nie jest możliwe, wobec tego

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots = \infty.$$

Stąd wynika, że również

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \right) = \frac{\infty}{2} = \infty,$$

a zatem  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \infty$ , bowiem  $1 > \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ , itd.

Niech  $A$  będzie dowolną liczbą. Zmienimy kolejność składników sumy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots,$$

tak by po tym przekształceniu sumą stała się liczba  $A$ . Niech  $m_1$  oznacza taką najmniejszą liczbę naturalną, że zachodzi nierówność

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m_1 - 1} \geq A.$$

Przez  $n_1$  oznaczamy taką najmniejszą liczbę naturalną, że

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m_1 - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2n_1} \leq A.$$

Przyjmijmy, że  $m_2$  jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m_1 - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2m_1 + 1} + \frac{1}{2m_1 + 3} + \dots + \frac{1}{2m_2 - 1} \geq A$$

i jednocześnie  $m_2 > m_1$ . Potem określamy  $n_2$  jako najmniejszą z tych liczb naturalnych, dla których

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m_1 - 1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2m_1 + 1} + \dots + \frac{1}{2m_2 - 1} - \frac{1}{2(n_1 + 1)} - \frac{1}{2(n_1 + 2)} - \dots - \frac{1}{2n_2} \leq A$$

i jednocześnie  $n_2 > n_1$ . Definiujemy w taki sposób dwa ściśle monotoniczne ciągi liczb naturalnych  $(m_j)$  i  $(n_j)$  oraz nowy szereg nieskończony, różniący się od sumy  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  jedynie kolejnością składników. Niech  $S_n$  oznacza  $n$ -tą sumę częściową nowego szeregu. Jasne jest, że

$$A - \frac{1}{2n_1} \leq S_{m_1+n_1} \leq A,$$

$$A \leq S_{m_1+n_1+m_2} < A + \frac{1}{2m_2 - 1},$$

$$A - \frac{1}{2n_2} < S_{m_1+n_1+m_2+n_2} \leq A \quad \text{itd.}$$

Pozostałe sumy częściowe znajdują się między pojawiającymi się w tych nierównościach. Wynika stąd, że  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Wykazaliśmy więc, że zmiana kolejności sumowania może spowodować w zasadzie dowolną zmianę sumy.

Czytelnik może zmodyfikować to rozumowanie, tak by nowa suma była równa  $\infty$  lub  $-\infty$ . Może też doprowadzić do tego, by po zmianie kolejności składników ciąg  $(S_n)$  w ogóle granicy nie miał.

Bernhard Riemann, jeden z najwybitniejszych matematyków wszech czasów, zaobserwował, że jeśli suma  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$  ma skończoną wartość i jednocześnie  $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots = +\infty$ , to można zmienić kolejność wyrazów szeregu, tak by suma stała się równa z góry danej liczbie rzeczywistej  $A$ . Podane wyżej rozumowanie po kosmetycznych zmianach staje się dowodem tego twierdzenia.



Dla  $A = 2$  początek wygląda tak:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots + \frac{1}{39} + \frac{1}{41} - \frac{1}{4},$$

więc  $m_1 = 8$ ,  $n_1 = 1$ ,  $m_2 = 21$ ,  $n_2 = 2$ .

Spacerujemy wokół punktu  $A$ , po przekroczeniu go natychmiast zwracamy w przeciwną stronę. Wyrazy szeregu to długości kolejnych kroczków.

Dodajmy na koniec, że wzór  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$ , z pozoru absurdalny, może mieć jednak pewien sens. Możemy napisać równość

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a) - (z-a)} = \frac{1}{1-a} \left( 1 + \frac{z-a}{1-a} + \left( \frac{z-a}{1-a} \right)^2 + \left( \frac{z-a}{1-a} \right)^3 + \dots \right),$$

która zachodzi dla każdej liczby zespolonej  $z$ , dla której spełniona jest

nierówność  $\left| \frac{z-a}{1-a} \right| < 1$ ; litera  $a$  też oznacza liczbę zespoloną. Przyjmując

kolejno  $a = 0$ ,  $a = i$ ,  $a = \frac{5}{4} + i$ ,  $a = \frac{9}{4} + i$ , otrzymujemy koła otwarte o środkach w wymienionych punktach i promieniach  $|1-a|$ , czyli  $1$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{17}$ ,  $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{41}$ .

Każde dwa kolejne mają punkty wspólne, a ostatnie zawiera liczbę  $z = 2$ .

Funkcja  $\frac{1}{1-z}$  jest więc przedstawiana różnymi wzorami w kolejnych kołach.

Można więc myśleć, że  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2}$  to wartość funkcji, która w kole opisanym nierównością  $|z| < 1$  jest zdefiniowana jako  $1 + z + z^2 + \dots$ , przedłużonej w rozsądny sposób poza to koło, tak że liczba 2 znajduje się w dziedzinie tego przedłużenia. W tym przypadku wyglądać może to na udziwnianie, ale w innych sytuacjach bywa inaczej: dany jest szereg i nie wiadomo, jaką funkcję przedstawia – to prowadzi do pojęcia funkcji analitycznej, zresztą na ogół wielowartościowej. Pisał o tym już Leonhard Euler (1707–1783), ale precyzyjne definicje pojawiły się po ponad stu latach.



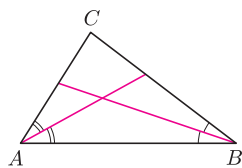
## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 805.** Po odsłuchaniu zapisu na taśmie magnetofonowej okazało się, że promień nawiniętej taśmy zmniejszył się dwukrotnie w czasie  $t_1 = 20$  minut. Po jakim dodatkowym czasie  $t_2$  promień nawiniętej taśmy zmniejszy się znowu dwukrotnie? Rozwiązanie na str. 10



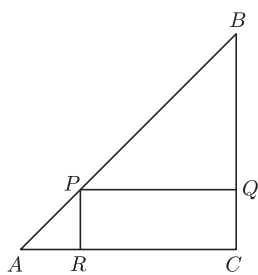
**F 806.** Na pustą szpulę starego magnetofonu, obracającą się ze stałą prędkością kątową, nawija się taśma magnetyczna. Po zakończeniu nawijania w czasie  $t_1$  okazało się, że promień nawiniętej taśmy  $r_k$  jest trzy razy większy od początkowego promienia  $r_0$ . W jakim czasie można nawinąć na tę samą szpulę taśmę magnetyczną takiej samej długości, ale dwa razy cieńszą? Rozwiązanie na str. 15



Rys. 1

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1339.** W trójkącie  $ABC$  kąt przy wierzchołku  $A$  ma większą miarę niż kąt przy wierzchołku  $B$  (rys. 1). Wykazać, że dwusieczna poprowadzona z wierzchołka  $B$  jest dłuższa niż dwusieczna poprowadzona z wierzchołka  $A$ . Rozwiązanie na str. 10



Rys. 2

**M 1340.** Na przeciwprostokątnej  $AB$  trójkąta prostokątnego równoramiennego  $ABC$  wybrano punkt  $P$ . Niech  $Q$  i  $R$  będą rzutami prostokątnymi punktu  $P$  na boki  $BC$  i  $CA$  (rys. 2). Udowodnić, że pole którejś z figur  $ARP$ ,  $PQB$ ,  $PRCQ$  stanowi co najmniej  $\frac{4}{9}$  pola trójkąta  $ABC$ . Rozwiązanie na str. 24

**M 1341.** Dane są liczby rzeczywiste  $a, b, c, d$ , takie że  $b < c < d$ . Udowodnić nierówność

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd).$$

Rozwiązanie na str. 11