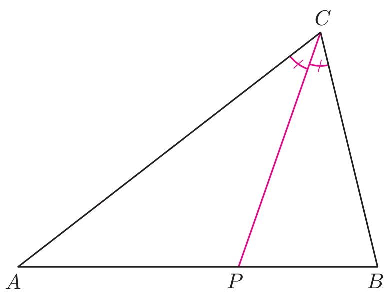
Odkryj twierdzenie sam

Czasem przydaje się do czegoś następujące *twierdzenie o dwusiecznej*:

jeśli w trójkącie ABC poprowadzimy dwusieczną kąta C przecinającą odcinek AB w punkcie P, to stosunek długości odcinków AP i BP będzie równy stosunkowi długości boków AC i BC (rys. 1).

O trudnych zadaniach i efektownych rozwiązaniach, w których ma ono swój udział, można by długo pisać, ale tym razem spojrzymy na nie od innej strony: ciekawe, czy istnieje jego odpowiednik w geometrii przestrzennej?

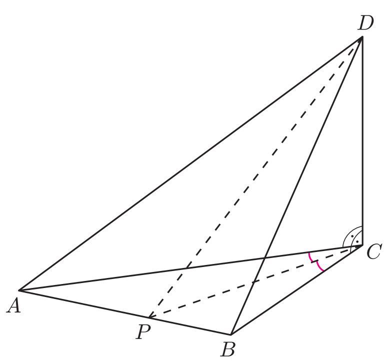


Rys. 1

Żeby otrzymać podobną zależność dla czworościanu, należałoby pewnie wziąć płaszczyznę dwusieczną kąta dwuściennego i jej punkt przecięcia z przeciwległą krawędzią. Stosunek długości odcinków, na które dzieli ją ta płaszczyzna, powinien być równy… no właśnie, czemu?

Weźmy jakiś szczególny czworościan i sprawdźmy, co dla niego wychodzi. Na przykład, co się dzieje dla czworościanu foremnego?

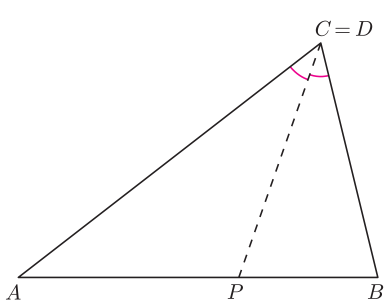
W tym przypadku dwusieczna kąta dwuściennego dzieli czworościan na symetryczne części i ten stosunek jest równy 1. Wydaje się, że podobnie jak dla trójkąta, powinniśmy umieć zapisać ten stosunek jako iloraz dwóch wielkości zależnych od ścian wybranego kąta dwuściennego. Niestety, pierwszy przykład wygląda na zbyt szczególny, ponieważ każdy ze stosunków: pól, obwodów, wysokości, krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest także równy 1. Trzeba pomyśleć nad lepszym przykładem do testowania.



Rys. 2a

Spróbujmy może wziąć taki czworościan $ABCD$, aby spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka D na podstawę ABC pokrywał się z punktem C (inaczej mówiąc, krawędź CD ma być prostopadła do ściany ABC), i popatrzeć na płaszczyznę dwusieczną kąta dwuściennego przy krawędzi CD (rys. 2a).

Dlaczego to dobry przykład? Widzimy, że część wspólna płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego przy krawędzi CD z płaszczyzną ABC jest dwusieczną kąta ACB, czyli na podstawie ABC mamy narysowaną sytuację z płaskiej wersji twierdzenia o dwusiecznej (rys. 2b).



Rys. 2b. Widok na czworościan $ABCD$ z góry.

A dlaczego tak jest? Zauważmy, że płaszczyzna dwusieczna dzieli kąt dwuścienny na połowy. Kąt dwuścienny zaś jest równy kątowi płaskiemu utworzonemu przez dwie proste leżące w półpłaszczyznach go ograniczających i prostopadłe do wspólnej krawędzi. Wybraliśmy czworościan tak, żeby prosta CD była prostopadła do płaszczyzny ABC, a więc w szczególności do prostych AC i BC. To oznacza, że proste AC i BC tworzą kąt płaski równy kątowi dwuściennemu między wybranymi ścianami.

Teraz, jeśli przez P oznaczymy punkt przecięcia płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego przy krawędzi CD z krawędzią AB, to na mocy twierdzenia o dwusiecznej mamy

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BP}.$$

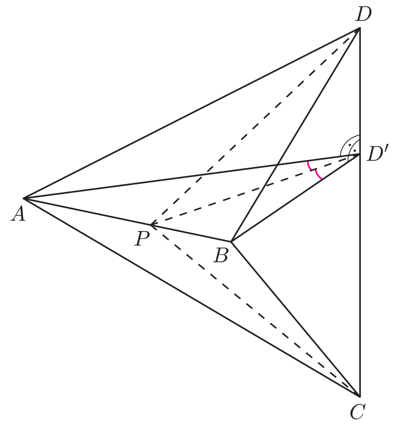
Możemy zatem stąd podejrzewać, że chodzi o stosunek pól ścian tworzących kąt dwuścienny. Albo stosunek wysokości opuszczonych na wspólną krawędź – czy widzisz, Czytelniku, że to ta sama liczba?

Czyli udowodniliśmy już pierwszy ciekawy przypadek rozszerzonego twierdzenia:

jeśli w czworościanie jedna z krawędzi jest prostopadła do pewnej ściany, to płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego przy tej krawędzi dzieli przeciwległą krawędź w stosunku równym stosunkowi pól ścian zawierających krawędź tworzącą kąt dwuścienny.

Wydaje się, że takie twierdzenie może być prawdziwe dla dowolnego czworościanu, ale czy potrafimy to jakoś udowodnić?

Moglibyśmy złożyć dwa czworościany, które mają taką samą podstawę i które spełniają założenia opracowanego już szczególnego przypadku. Dokładniej, wysokości opuszczone na te ściany, które będziemy sklejać, muszą być krawędziami czworościanu.

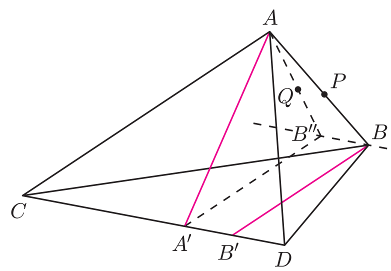


Rys. 3

Czworościan $ABCD$ możemy w ten sposób skleić z dwóch mniejszych, gdy da się skonstruować płaszczyznę zawierającą pewną krawędź i prostopadłą do krawędzi przeciwległej. Na rysunku 3 widać płaszczyznę zawierającą krawędź AB i prostopadłą do krawędzi CD. Punkt D' to punkt przecięcia tej płaszczyzny z krawędzią CD.

W tej sytuacji, korzystając ze szczególnego przypadku twierdzenia dla czworościanów $ABCD$ i $ABD'D$, mamy
$$\frac{AP}{BP} = \frac{AD'}{BD'} = \frac{[ACD]}{[BCD]},$$
ponieważ odcinki AD' i BD' są prostopadłe do krawędzi CD.

Co ciekawe, punkt D' może leżeć też poza odcinkiem CD – wtedy można powiedzieć, że odejmujemy czworościany, zamiast je dodawać.



Rys. 4

Niestety, to jeszcze nie wszystko. Istnieją czworościany $ABCD$, których nie można w ten sposób skleić – spodki wysokości poprowadzonych z wierzchołków A i B na prostą CD nie pokrywają się. Co wtedy?

Spróbujmy narysować sytuację dla dowolnego czworościanu (rys. 4). Niech A' i B' będą rzutami prostokątnymi odpowiednio wierzchołków A i B na prostą CD. Umiemy już udowodnić twierdzenie w przypadku, gdy punkty A' i B' się pokrywają. Ogólnie jednak nie musi tak być, więc nie mamy trójkąta, dla którego można by zastosować twierdzenie o dwusiecznej.

Skąd wziąć taki trójkąt? Może coś przesunąć tak, żeby punkty B' i A' trafiły w jedno miejsce? Wyobraźmy sobie przesunięcie równoległe odcinka BB' wzdłuż prostej CD tak, żeby B' pokrył się z A'. Niech B'' będzie obrazem punktu B w tym przesunięciu.

Wtedy punkt A' jest rzutem prostokątnym punktu B'' na prostą CD, czyli czworościan $AB''CD$ da się skleić z dwóch „ładniejszych”, tak jak to robiliśmy przed chwilą! To znaczy, że jeśli płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego przy krawędzi CD przecina krawędź AB'' w punkcie Q, to
$$\frac{AQ}{B''Q} = \frac{AA'}{B''A'} = \frac{[ACD]}{[B''CD]}.$$
A ponieważ przesuwaliśmy punkt B'' równolegle do CD, to $B''A' = BB'$ i $[B''CD] = [BCD]$.

Gdybyśmy jeszcze wykazali, że
$$\frac{AQ}{B''Q} = \frac{AP}{BP},$$
czyli inaczej, że proste PQ i BB'' są równoległe, to otrzymalibyśmy pełną wersję twierdzenia. Na szczęście to już jest łatwe: skoro odcinki BB'' i CD są równoległe, to każda płaszczyzna zawierająca prostą CD przecina płaszczyznę ABB'' wzdłuż pewnej prostej równoległej do BB''.

Zaraz, czy na pewno? Tak – gdyby proste PQ i BB' miały jakiś punkt wspólny S, to płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego przy krawędzi CD miałaby trzy punkty wspólne z płaszczyzną CD: punkty C, D oraz S.

Wobec tego nie mamy już żadnych wątpliwości, że

w dowolnym czworościanie płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego dzieli przeciwległą krawędź w stosunku równym stosunkowi pól ścian czworościanu zawierających krawędź tego kąta dwuściennego.

Małą Deltę przygotował Michał KIEZA