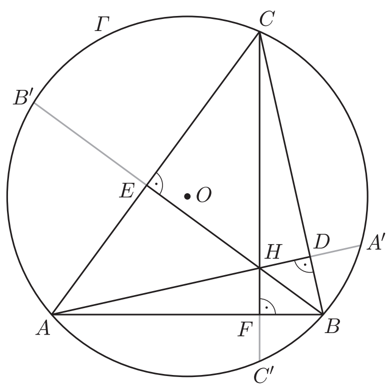
Odbicia ortocentrum

Joanna JASZUŃSKA

Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia jego wysokości. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach 1 i 2 oraz założenie, że trójkąt ABC jest ostrokątny.



Rys. 1. A', B', C' to punkty przecięcia wysokości trójkąta z okręgiem Γ.

Twierdzenie (∗). *Punkty A', B', C' są obrazami ortocentrum trójkąta ABC w symetriach względem prostych odpowiednio BC, CA, AB.*

Dowód. Trójkąty ABD i CBF są prostokątne o wspólnym kącie przy wierzchołku B, więc $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BCC'$. Jednocześnie $\sphericalangle BCC' = \sphericalangle BAC'$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Stąd $\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BAC'$, więc trójkąty prostokątne FAH i FAC', o wspólnym boku FA, są przystające. Wobec tego $HF = C'F$. Analogicznie $HD = A'D$ oraz $HE = B'E$, co kończy dowód. □

1. Udowodnij twierdzenie (∗) dla trójkąta ABC niekoniecznie ostrokątnego.

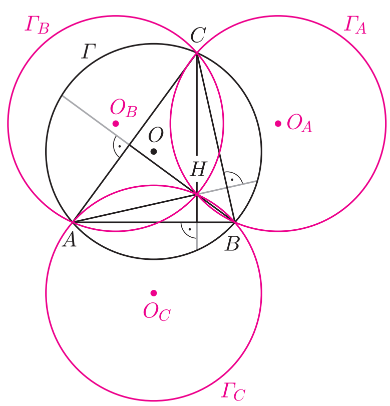
2. Dany jest okrąg Γ, punkt A na nim i punkt H wewnątrz niego. Wpisz w okrąg Γ taki trójkąt o wierzchołku A, żeby punkt H był jego ortocentrum.

3. Wykaż, że trójkąty $A'B'C'$ i DEF są podobne.

4. Wykaż, że $A'A, B'B, C'C$ są dwusiecznymi kątów trójkąta $A'B'C'$.

5. Udowodnij, że okręgi $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ są przystające (rys. 2).

6. Wykaż, że trójkąt $O_AO_BO_C$ przystaje do trójkąta ABC, punkt O jest jego ortocentrum oraz punkt H jest środkiem opisanego na nim okręgu (rys. 2).



Rys. 2. $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ to okręgi opisane odpowiednio na trójkątach BCH, CAH, ABH.

7. Udowodnij, że H jest jedynym punktem wewnątrz trójkąta ABC, którego obrazy w symetriach względem prostych BC, CA, AB leżą na okręgu Γ.

8. Wykaż, że środki okręgów dopisanych do trójkąta i punkty symetryczne do środka okręgu wpisanego w ten trójkąt względem jego wierzchołków leżą na jednym okręgu.

9. Wykaż, że $AD \cdot HD = BD \cdot DC$ oraz że $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

10. Udowodnij, że obrazy symetryczne ortocentrum względem środków boków trójkąta leżą na okręgu Γ. Jak punkty te są położone względem A, B i C?

11. Dany jest okrąg Γ i punkt H wewnątrz niego. Wyznacz zbiór środków boków takich trójkątów wpisanych w okrąg Γ, że punkt H jest ich ortocentrum.

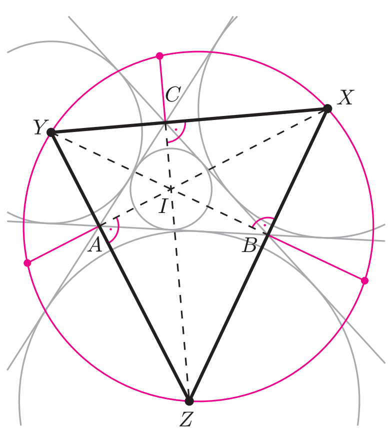
12. Oznaczmy przez P i Q odpowiednio punkty przecięcia prostych OB' z AC oraz OC' z AB. Wykaż, że istnieje okrąg styczny do prostych $B'P, HP, C'Q, HQ$.

Rozwiązania niektórych zadań

R2. Punkt przecięcia prostej AH z okręgiem to A'. Na mocy (∗), symetralna odcinka HA' przecina okrąg Γ w szukanych punktach B i C. □

R4. Na mocy (∗) mamy $AB' = AH = AC'$, więc $\sphericalangle AA'B' = \sphericalangle AA'C'$ jako kąty wpisane oparte na równych łukach $\overset{\frown}{AB'}$ i $\overset{\frown}{AC'}$. Wobec tego $A'A$ jest dwusieczną kąta $B'A'C'$. Dowód dla $B'B$ i $C'C$ przebiega analogicznie. □

R5. Okręgi Γ_C i Γ są przystające, jako opisane na symetrycznych trójkątach ABH i ABC'. Analogicznie okręgi Γ_A i Γ_B przystają do Γ. □



Rys. 3

R7. Aby obraz punktu X w symetrii względem BC leżał na okręgu Γ, punkt X musi leżeć na obrazie okręgu Γ w tej symetrii, czyli na okręgu Γ_A. Musi też leżeć na Γ_B i Γ_C, a jedynym wspólnym punktem tych trzech okręgów jest H. □

R8. Oznaczmy środki okręgów dopisanych przez X, Y, Z (rys. 3). Wtedy $XI \perp YZ$, $YI \perp XZ$ oraz $ZI \perp XY$ jako dwusieczne kątów przyległych. Stąd punkt I jest ortocentrum trójkąta XYZ. Punkty symetryczne do I względem wierzchołków wyjściowego trójkąta są odbiciami ortocentrum I trójkąta XYZ w jego bokach, więc na mocy (∗) leżą na okręgu opisanym na trójkącie XYZ. □

Wskazówka 9. Trójkąty podobne lub potęga punktów D i H względem okręgu Γ.

Wskazówka 11. Jest to obraz okręgu Γ w jednokładności o środku H i skali 1/2.

Wskazówka 12. Środkiem szukanego okręgu jest punkt A.

Zadanie 2 pochodzi z XIX Olimpiady Matematycznej, a zadanie 8 z XVII OM.

Które z udowodnionych faktów pozostają prawdziwe dla trójkąta ABC niekoniecznie ostrokątnego? Które sformułowania wymagają modyfikacji i jakich?