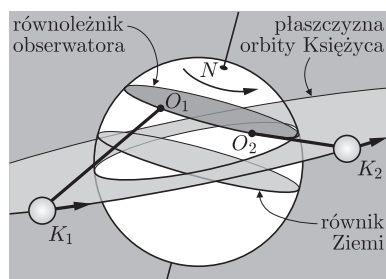


# Jak wyznaczyć odległość Ziemia–Księżyc?

Andrzej BRANICKI\*

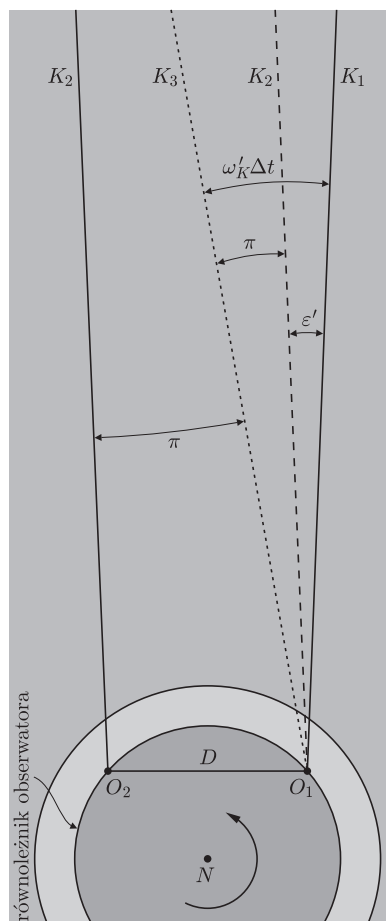
Odpowiedź na zawarte w tytule pytanie brzmi: bardzo łatwo. Wystarczy lornetka, a w szczególnych sytuacjach można nawet prowadzić obserwacje gołym okiem. Ta ostatnia metoda umożliwia, oczywiście, jedynie zgrubne oszacowanie odległości, natomiast rezultaty obserwacji wykonanych lornetką zasługują już na miano pomiaru.

Nawet jeśli, Drogi Czytelniku, nie jesteś jeszcze astronomem amatorem, podana wyżej odpowiedź jest słuszna także i w Twoim przypadku. Kolorowym tekstem podamy tu kilka rad dla bardzo początkujących adeptów sztuki obserwacji nieba.



Rys. 1. Położenia obserwatora  $O_1$  i  $O_2$  oraz Księżyca  $K_1$  i  $K_2$  w chwilach obserwacji, odpowiednio,  $t_1$  i  $t_2$ .

Kilkakrotne spojrzenie na niebo w odstępie paru godzin przekonuje nas, że Księżyc nieustannie zmienia swoje położenie względem gwiazd, przemieszczając się na ich tle *w lewo*, tj. przeciwnie do kierunku swojego ruchu względem horyzontu. Ruch ten jest złożeniem ruchu orbitalnego Księżyca oraz ruchu obserwatora poruszającego się w przestrzeni wraz z obracającą się Ziemią. Jeżeli zatem z zaobserwowanego kąтового przemieszczenia Księżyca  $\varepsilon$  wyodrębnimy tę jego część  $\pi$ , która jest następstwem zmiany miejsca obserwacji, będziemy mogli wyznaczyć odległość do Księżyca  $r$  na podstawie odległości  $D$ , o jaką przesunął się podczas pomiarów obserwator.



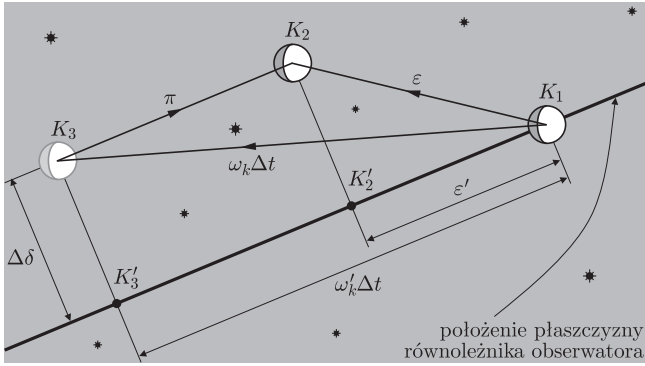
Rys. 2. Rzuty kierunków do Księżyca na płaszczyznę ruchu obserwatora, czyli na płaszczyznę równoleżnika.

Jak wyznaczyć wartość  $\pi$ ? Przyjmijmy, że obserwator dokonał dwukrotnej rejestracji pozycji Księżyca na tle gwiazd. Rysunek 1 przedstawia położenia obserwatora  $O_1$  i  $O_2$  oraz Księżyca  $K_1$  i  $K_2$  w momencie pierwszej i drugiej obserwacji, odpowiednio  $t_1$  i  $t_2$ . Na rysunku 2 ta sama sytuacja jest pokazana od strony północnego bieguna Ziemi. Na tym rysunku położenia obserwatora oraz kierunki obserwator Księżyc są zrzutowane na płaszczyznę, w której porusza się obserwator, tj. na płaszczyznę równoleżnika obserwatora. Dla uproszczenia rysunku przyjęto, że obserwacje wykonane zostały w chwilach  $t_1$  i  $t_2$  symetrycznych względem chwili  $t_g$ , w której Księżyc osiąga największą wysokość ponad horyzontem ( $t_g - t_1 = t_2 - t_g$ ). Wówczas przemieszczenie  $D$  obserwatora między pierwszą i drugą obserwacją będzie prostopadłe do kierunku na Księżyc w chwili jego górowania. Ze względu na znikomość tego przemieszczenia w porównaniu z odległością do gwiazd można przyjąć, że dwie równoległe linie oznaczone (na rys. 2) symbolem  $K_2$ , wychodzące z miejsc obserwacji  $O_1$  i  $O_2$ , wskazują na tle gwiazd ten sam punkt. Jest to miejsce, w którym jest widoczny Księżyc podczas drugiej obserwacji. Prosta  $K_3$  (linia kropkowana) pokazuje natomiast kierunek do Księżyca, jaki wskazałby obserwator w chwili  $t_2$ , gdyby patrzył z miejsca, w którym dokonywał pierwszej obserwacji, czyli w przypadku, gdyby przemieszczenie Księżyca na tle gwiazd powodowane było jedynie jego ruchem orbitalnym. Z rysunku 2 wynika także związek między przemieszczeniem  $D$  i odległością do Księżyca  $r$ . Z uwagi na to, że kąt  $\pi$  jest bardzo mały, spełniają one zależność  $\pi \approx \text{tg } \pi = D/r$ .

Górowanie jest chwilą, w której obiekt osiąga największą wysokość ponad horyzontem, czyli wtedy, gdy przechodzi on przez płaszczyznę prostopadłą do horyzontu, przecinającą go wzdłuż kierunku północ-południe. Wystarczającą dokładność wyznaczenia  $t_g$  można uzyskać, wykonując obserwacje gołym okiem. Wystarczy, na przykład, określić chwile  $t_{g,1}$  i  $t_{g,2}$  ograniczające przedział czasu, w którym będzie się wydawało, że Księżyc znajduje się w kierunku południowym. Wartości te pozwolą oszacować zarówno moment górowania  $t_g = (t_{g,1} + t_{g,2})/2$ , jak i niepewność oszacowania  $\Delta t_g = (t_{g,1} - t_{g,2})/2$ .

Rysunek 3 przedstawia położenia Księżyca na tle gwiazd tak, jak widzi je ziemski obserwator. Zaznaczono tam również przestrzenną orientację płaszczyzny równoległej do płaszczyzny ruchu obserwatora. Zaobserwowane przemieszczenie Księżyca względem gwiazd ( $K_1 \rightarrow K_2$ ) o kąt  $\varepsilon$  jest wypadkową orbitalnego

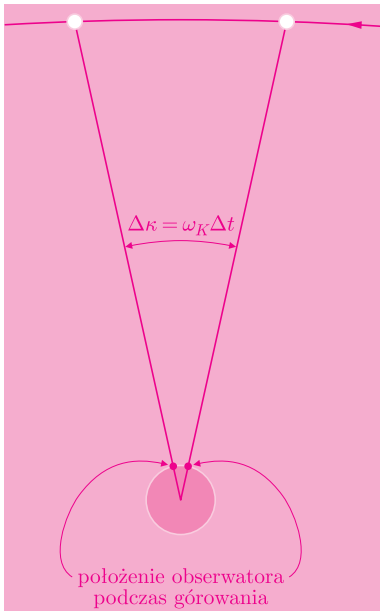
\*Wydział Fizyki, Uniwersytet w Białymstoku



Rys. 3. Położenia Księżyca  $K_1$  i  $K_2$  na tle gwiazd obserwowane z Ziemi w chwilach  $t_1$  i  $t_2$ . Przez  $K_3$  oznaczono położenie Księżyca, jakie widziałby nieruchomy obserwator pozostający stale w  $O_1$ . Punkty  $K'_2$  i  $K'_3$  są rzutami punktów odpowiednio  $K_2$  i  $K_3$  na płaszczyznę równoleżnika obserwatora.

przemieszczenia Księżyca o kąt  $\omega_K(t_1 - t_2) = \omega_K \Delta t$  w płaszczyźnie orbity Księżyca ( $K_1 \rightarrow K_3$ ) oraz przesunięcia obserwatora w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny jego ruchu ( $K_3 \rightarrow K_2$ ). Zwrot przesunięcia  $\pi$  jest przeciwny do kierunku ruchu obserwatora, czyli zgodny z ruchem gwiazd względem horyzontu – w prawo.

Najprostszy sposób wyznaczenia  $\omega_K$  polega na zarejestrowaniu pozycji Księżyca względem gwiazd w chwilach jego górowania  $t_{g,I}$  i  $t_{g,II}$  podczas dwóch kolejnych nocy (rys. a). W chwili górowania pozycja obserwatora względem prostej łączącej środek Ziemi i Księżyca jest taka sama, więc zaobserwowane kątowne przesunięcie Księżyca  $\Delta\kappa$ , będzie spowodowane wyłącznie jego ruchem orbitalnym. Oznacza to, że  $\omega_K = \Delta\kappa / |t_{g,II} - t_{g,I}|$ . Jeśli przesunięcie Księżyca na tle gwiazd  $\varepsilon$  będzie określone na oko, to usprawiedliwione będzie przyjmowanie na  $\omega_K$  wartości średniej wynikającej z okresu jego obrotu wokół Ziemi  $\omega_K = 2\pi / (27,32 \text{ doby}) = 9,610 \cdot 10^{-3} \text{ rad/h}$ .



Rys. a. Wyznaczanie chwilowej prędkości kątowej Księżyca.

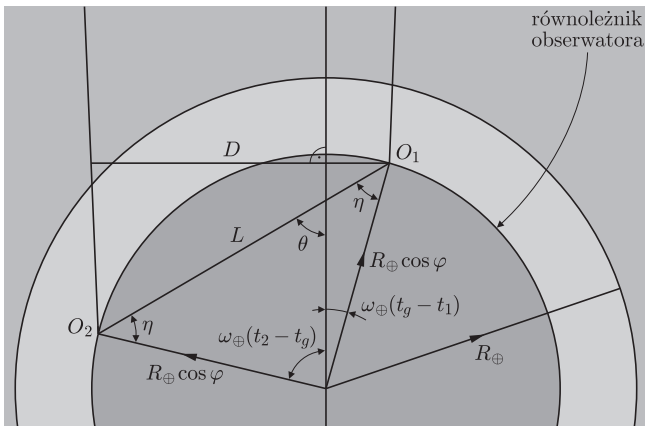
Punkty  $K_1, K_2$  i  $K'_2$  oraz  $K_1, K_3$  i  $K'_3$ , przedstawione na rysunku 3, wyznaczają dwa trójkąty sferyczne. Długości boków tych trójkątów można opisać kątami odpowiednio  $\varepsilon, \Delta\delta$  i  $\varepsilon'$  oraz  $\omega_K \Delta t, \Delta\delta$  i  $\omega'_K \Delta t$ . Jeśli odstęp czasu pomiędzy pierwszą i drugą obserwacją  $\Delta t$  będzie wynosił kilka godzin, to wszystkie te kąty będą bardzo małe i trójkąty sferyczne  $K_1 K_2 K'_2$  i  $K_1 K_3 K'_3$  można przybliżyć przez trójkąty płaskie. Otrzymamy stąd:

$$(1) \quad \pi = \omega'_K \Delta t - \varepsilon' = \sqrt{(\omega_K \Delta t)^2 - \Delta\delta^2} - \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta\delta^2},$$

co pozwoli nam już obliczyć odległość do Księżyca  $r$  przy znajomości przesunięcia  $D$ .

Do wyznaczenia wartości kąta  $\Delta\delta$  niezbędna jest znajomość kierunku, w którym przesunął się Księżyc względem gwiazd w wyniku ruchu obserwatora ( $K_3 \rightarrow K_2$ ). Z powodu rotacji Ziemi każdy obserwator porusza się po okręgu (równoleżniku), którego płaszczyzna jest prostopadła do osi obrotu Ziemi. Jeśli obserwowany obiekt znajduje się w kierunku tworzącym z osią obrotu Ziemi kąt przekraczający  $60^\circ$ , jak ma to miejsce w przypadku Księżyca, to w kilkugodzinnym okresie obserwacji, obejmującym moment górowania, przesunięcie obiektu spowodowane ruchem obserwatora będzie niemal dokładnie równoległe do płaszczyzny ruchu obserwatora. Ponieważ oś obrotu Ziemi można utożsamiać z osią obrotu nieba, więc płaszczyzna ruchu obserwatora (płaszczyzna równoleżnika) jest prostopadła do tej osi.

Na rysunku lub mapie nieba reprezentowała ją będzie linia przechodząca przez miejsce, w którym znajduje się Księżyc i prostopadła do kierunku na biegun nieba (Gwiazdę Polarną) lub linia równoległa do kierunku dobowego ruchu gwiazd. Zwrot przesunięcia Księżyca spowodowany ruchem obserwatora będzie przeciwny do ruchu obserwatora, czyli zgodny z kierunkiem dobowego ruchu gwiazd.



Rys. 4. Widok Ziemi od strony bieguna. Przez  $L$  i  $D$  oznaczono przesunięcie obserwatora oraz rzut tego przesunięcia na kierunek prostopadły do kierunku Ziemia–Księżyc w chwili górowania Księżyca. Jak poprzednio,  $O_1$  i  $O_2$  oznaczają położenia obserwatora w chwilach odpowiednio  $t_1$  i  $t_2$ .

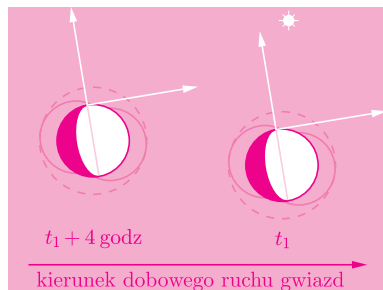
Wyznaczając przesunięcie  $D$ , warto uwzględnić sytuację ogólniejszą od przedstawionej na rysunku 2, mianowicie taką, że przestrzenne przesunięcie obserwatora  $L$  nie jest prostopadłe do kierunku na Księżyc w chwili jego górowania, tj. gdy  $t_g - t_1 \neq t_2 - t_g$  (rys. 4). Patrząc na trójkąt o wierzchołkach w punktach  $O_1, O_2$  i w środku Ziemi, stwierdzamy, że  $L = 2R_Z \cos \varphi \sin(\frac{1}{2}\omega_Z \Delta t)$ , gdzie  $R_Z$  jest promieniem Ziemi,  $\varphi$  szerokością geograficzną obserwatora, zaś  $\omega_Z$  prędkością kątową ruchu wirowego Ziemi. Rzut całkowitego przestrzennego przesunięcia obserwatora  $L$  na kierunek prostopadły do kierunku Ziemia–Księżyc w chwili górowania Księżyca jest równy  $D = L \cos(90^\circ - \theta) = L \sin \theta$ . Ponieważ zaś  $\theta = 180^\circ - \eta - \omega_Z(t_2 - t_g)$  oraz  $\eta = 90^\circ - \frac{1}{2}\omega_Z \Delta t$ , więc

ostatecznie otrzymamy

$$(2) \quad D = 2R_Z \cos \varphi \sin \left( \frac{1}{2} \omega_Z \Delta t \right) \cos \left( \omega_Z \left( t_g - \frac{1}{2} (t_1 + t_2) \right) \right).$$

Podstawiając obliczone ze wzorów (1) i (2) wielkości  $\pi$  oraz  $D$  do zależności  $r = D/\pi$ , uzyskujemy szukaną odległość do Księżyca.

Względna dokładność wyznaczenia kątów  $\varepsilon$  i  $\Delta\delta$  będzie tym większa, im dłuższy będzie odstęp czasu  $\Delta t$  między obserwacjami. Wzrostowi dokładności sprzyjała będzie również sytuacja, gdy Księżyc będzie położony w pobliżu jasnych gwiazd lub planet. Minimalnym wymogiem byłby jeden jasny obiekt w odległości nieprzekraczającej średnicy pola widzenia lornetki. W tym przypadku do zbudowania układu odniesienia pozwalającego ocenić przesunięcie Księżyca względem obiektu należy wykorzystać dwa dowolne punkty na tarczy Księżyca lub przynajmniej jego rogi (rys. b). Rezultatem obserwacji powinno być zaznaczenie na rysunku lub mapie dwóch położen Księżyca względem gwiazd, zanotowanie chwil  $t_1$  i  $t_2$  dokonania tych lokalizacji oraz zaznaczenie kierunku ruchu obserwatora.



Rys. b. Przykład przybliżonej oceny położenia Księżyca w oparciu o jeden bliski, jasny obiekt. Liniami przerywaną narysowane są okręgi informujące o wielkości błędu lokalizacji tarczy Księżyca.

Jeśli zdarzy się tak, że w pobliżu Księżyca znajdzie się jasna gwiazda lub jedna z jasnych planet (np. Wenus, Mars, Jowisz, Saturn), a okres  $\Delta t$  nie będzie krótszy niż cztery godziny, to oceny przesunięcia Księżyca będzie można dokonać nawet bez korzystania z lornetki. Sytuację taką należy potraktować jak zaproszenie do naukowej zabawy (jej rezultat będzie bowiem tylko grubym oszacowaniem odległości). Obserwacja polegała będzie na zapamiętaniu położenia Księżyca względem jasnego obiektu w chwili  $t_1$  i porównaniu go z położeniem w chwili  $t_2$ . Zaobserwowane w ten sposób przesunięcie kątowe  $\varepsilon$  najlepiej będzie określać jako wielokrotność średnicy Księżyca, a następnie wyrazić je w radianach, przyjmując na średnicę tarczy wartość  $0,5^\circ \approx 0,0087$  rad. Gdy zatem, Drogi Czytelniku, zobaczysz w pobliżu Księżyca jasny obiekt, to – dla ułatwienia pamięciowych rachunków – możesz przyjąć, że kątowa średnica Księżyca jest równa 0,01 rad,  $\omega_K \approx 0,01$  rad/h, zaniedbać  $\Delta\delta$  oraz pamiętać, że w ciągu godziny Ziemia przenosi każdego Europejczyka na odległość około 1000 km. Przy tych założeniach, jeśli  $\Delta t$  będzie wyrażone w godzinach, a  $\varepsilon$  jako wielokrotność średnic Księżyca, to  $D \approx 1000\Delta t$  km,  $\pi \approx (\Delta t - \varepsilon)/100$ , zaś  $r = D/\pi$  km.

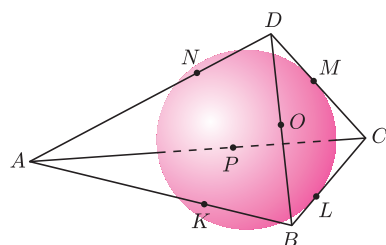
Udanych obserwacji i dobrej zabawy!

## Kącik przestrzenny (16): Sfera styczna do krawędzi czworościanu

Dla trójkąta definiujemy okrąg opisany i okrąg wpisany. Podobnie z czworościanem można związać dwie naturalne sfery: sferę przechodzącą przez wierzchołki (opisaną) oraz sferę styczną do ścian (wpisaną). Można jednak rozważać jeszcze trzecią ciekawą sferę – styczną do krawędzi. Taka sfera na pewno istnieje dla czworościanu foremego (jej środek pokrywa się ze środkami sfery wpisanej i opisanaj, zaś promień jest równy odległości tego punktu od dowolnej krawędzi). Dla jakich innych czworościanów można taką sferę znaleźć? Odpowiedź zawarta jest w następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie 1.** *Następujące warunki są równoważne:*

- istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu,
- istnieją cztery parami styczne sfery o środkach w wierzchołkach czworościanu,
- sumy długości trzech par przeciwległych krawędzi czworościanu są równe,
- okręgi wpisane w ściany czworościanu są parami styczne.



Rys. 1

**Dowód.** (a) $\Rightarrow$ (b). Oznaczmy przez  $K, L, M, N, O, P$  punkty styczności danej sfery odpowiednio z krawędziami  $AB, BC, CD, DA, BD, AC$ . Wówczas z Najmocniejszego Twierdzenia Stereometrii (patrz Kącik 2) otrzymujemy

$$AK = AN = AP = a, \quad BK = BL = BO = b, \\ CL = CM = CP = c, \quad DM = DN = DO = d.$$

Nietrudno teraz zauważyć, że sfery o środkach  $A, B, C, D$  i promieniach odpowiednio  $a, b, c, d$  są parami styczne.

(b) $\Rightarrow$ (c). Przyjmując poprzednie oznaczenia, otrzymujemy

$$AB + CD = AK + BK + CM + DM = a + b + c + d$$

i podobnie  $AC + BD = a + b + c + d = AD + BC$ .